

对多层原始方程模式的合理性分析*

王诗文 廖洞贤

(国家气象局国家气象中心, 北京100081)

提 要

本文分理论基础和数值分析两部份。在第一部份中, 利用绝热无耗散多层原始方程模式从理论上证明, 如在初始时刻 t_0 时运动是对称的(包括地形是对称的), 则在 $t > t_0$ 的任一时刻, 运动将保持是对称的。还在考虑对称地形情况下用模式进行时间数值积分, 证明了理论结果的正确性。因而, 理论结果可以作为分析模式合理性的基础。

但是, 如考虑实际地形, 则由于其对称部份和反对称部份数量相当, 运动的对称性会大大降低。受影响的地区主要是北半球高山地区和南半球与之对称的低地。而且, 这种影响是从低层逐渐传播到高层的。

关键词: 大气, 原始方程模式, 合理性。

1 引 言

一个设计好的模式需要进行分析, 以考察其各个部份是否合理, 有关算法和软件是否有误等。用来作这种分析的方法有两种: 一是定量的, 如用模式的解析解和其数值解进行比较等; 一是定性的, 如考察数值解是否具有模式的重要物理性质等。后一种方法不必求出解析解, 但在分析模式设计是否有误这一点, 在定性上仍然可以起到和前一种方法类似的作用。

在文献[1]、[2]和[3]中, 作者之一曾在大气对称运动和非对称运动的研究中得出, 在正压过滤模式, 正压原始方程模式, 或 p -坐标系中的多层原始方程模式大气中, 如初始时刻运动是对称的, 则在绝热无摩擦无地形的情况, 以后运动将一直维持对称的状态。在文献[4]中还把这种性质作为半球定解条件的依据。现在, 我们要问, 这个结果是否对 σ -坐标系中的多层原始方程模式大气仍然成立? 这是本文第一部份要回答的问题。在得到类似的结果, 并进行讨论以后, 本文第二部份还将用模式进行数值积分以分析模式设计的合理性, 并分析对称地形和非对称地形对大气运动对称性的影响。

2 理论基础

2.1 基本方程组

在 σ -坐标系中原始方程模式方程组可以写成

* 1990年12月19日收到原稿, 1991年3月25日收到最后修改稿。

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + f\mathbf{K} \times \mathbf{V} = -(\nabla\phi + RT\nabla P) + \mathbf{F} \quad (1)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{RT}{c_p} \left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} - \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} - \nabla \cdot \mathbf{V} \right) + \frac{Q}{c_p} + F_T \quad (2)$$

$$\frac{dq}{dt} = -C + E + F_q \quad (3)$$

$$\frac{dP}{dt} = -(\mathbf{V} \cdot \nabla P + \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma}) \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma} = -\frac{RT}{\sigma} \quad (5)$$

$$\dot{\sigma} = (\sigma \int_{\sigma}^{\sigma_0} - \int_{\sigma}^{\sigma_0}) (\mathbf{V} \cdot \nabla P + \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma}) \quad (6)$$

其中 F 为单位质量的摩擦力, Q 为单位质量的加热率, $P = 10^5 p^*$, p^* 为场面气压, $\sigma = p/p^*$, C 是单位质量空气中水汽的凝结率, E 是单位质量空气中水滴的蒸发率, 其他都是气象中常用的符号。

2.2 对称运动和反对称运动的定义

2.2.1 基本大气

为了下面讨论的方便, 设基本大气是静止的, 其温度只随 σ 变化的大气, 即

$$\bar{v} = \bar{u} = 0, \quad (7)$$

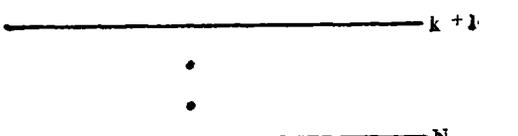
$$\bar{T} = \bar{T}(\sigma) \quad (8)$$

其中 $(\bar{\quad})$ 表示全球面平均。

设模式大气满足静力方程, 如采用欧洲中期天气预报中心模式的离散形式^[5]

$$\phi_{k+1/2} = \phi^* + R \sum_{l=k+1}^N T_l \ln \frac{\sigma_{l+1/2}}{\sigma_{l-1/2}} \quad (9)$$


则

$$\bar{\phi}_{k+1/2} = \bar{\phi}^* + R \sum_{l=k+1}^N \bar{T}_l \ln \frac{\sigma_{l+1/2}}{\sigma_{l-1/2}} \quad (10)$$


即 $\bar{\phi}$ 只是 σ 的函数。这里 ϕ^* 是地面位势高度。

图 1 模式大气分层示意

2.2.2 对称和反对称

任一标量 $M(\lambda, \varphi, \sigma, t)$ 可以表示为如下形式:

$$M(\lambda, \varphi, \sigma, t) = M_s(\lambda, \varphi, \sigma, t) + M_a(\lambda, \varphi, \sigma, t) \quad (11)$$

其中下标 S 和 A 各表示 M 的对称部份和反对称部份。它们各定义作

$$M_s(\lambda, \varphi, \sigma, t) = M_s(\lambda, -\varphi, \sigma, t) \quad (12)$$

和

$$M_a(\lambda, \varphi, \sigma, t) = -M_a(\lambda, -\varphi, \sigma, t) \quad (13)$$

至于任一向量 M (如水平风速 V), 可表示为

$$M = M_s + M_e \quad (14)$$

其中 $M_s = (M_x)_s i + (M_y)_s j$, $M_e = (M_x)_e i + (M_y)_e j$, i, j 各是沿纬圈和经圈的单位向量, M_x, M_y 各是相应的分量。

2.2.3 对称运动和反对称运动

有了上面式(11)和(14)后, 在绝热无耗散的多层原始方程模式大气中, 对称运动和反对称运动可以分别定义为:

$$(u, v, T', \tilde{\phi}'^{\sigma}, P') = (u_s, v_s, T'_s, \tilde{\phi}'_s{}^{\sigma}, P'_s) \quad (15)$$

和

$$(u, v, T', \tilde{\phi}'^{\sigma}, P') = (u_e, v_e, T'_e, \tilde{\phi}'_e{}^{\sigma}, P'_e) \quad (16)$$

其中

$$T' = T - \bar{T}, \phi' = \phi - \bar{\phi}, P' = P - \bar{P}, (\tilde{\phi}'^{\sigma}) = \frac{1}{2} [(\phi')_{i+1/2} + (\phi')_{i-1/2}]$$

于是, 在对称运动的情况, 我们可以推出: $\nabla \cdot V, \dot{\sigma}, \phi^{*'} (= \phi^* - \bar{\phi}^*)$ 是对称的, 相对涡度 ζ 是反对称的。

在反对称运动的情形, 还可以推出: $\nabla \cdot V, \phi^{*'}, \dot{\sigma}$ 是反对称的, ζ 是对称的。

2.3 描写对称运动和反对称运动的方程组

用 V 代替 M , 用 $T', P', q', \phi', \dot{\sigma}$ 分别代替 M , 把式(11)和(14)代入方程组(1)–(4)和方程(6)、(9)、(10), 利用文献[1]中用过的方法, 我们可以得到描写对称运动和反对称运动的方程组, 它们各是:

2.3.1 对称运动方程组

$$\frac{\partial V_s}{\partial t} + (V_s \cdot \nabla) V_s + (V_e \cdot \nabla) V_e + \dot{\sigma}_s \frac{\partial V_s}{\partial \sigma} + \dot{\sigma}_e \frac{\partial V_e}{\partial \sigma} + fK \times V_s = - [\nabla \tilde{\phi}'_s{}^{\sigma} + R(\bar{T} + T'_s) \nabla P'_s + RT'_s \nabla P'_e] + F_s \quad (17)$$

$$\frac{\partial T'_s}{\partial t} + V_s \cdot \nabla T'_s + V_e \cdot \nabla T'_e + \dot{\sigma}_s \frac{\partial T'_s}{\partial \sigma} + \dot{\sigma}_e \frac{\partial T'_e}{\partial \sigma} = \kappa \left[(\bar{T} + T'_s) \left(\frac{\dot{\sigma}_s}{\sigma} - \frac{\partial \dot{\sigma}_s}{\partial \sigma} - \nabla \cdot V_s \right) + T'_e \left(\frac{\dot{\sigma}_e}{\sigma} - \frac{\partial \dot{\sigma}_e}{\partial \sigma} - \nabla \cdot V_e \right) \right] + \frac{Q_s}{c_p} + (F_s)_s \quad (18)$$

$$\frac{\partial q'_s}{\partial t} + V_s \cdot \nabla q'_s + V_e \cdot \nabla q'_e + \dot{\sigma}_s \frac{\partial q'_s}{\partial \sigma} + \dot{\sigma}_e \frac{\partial q'_e}{\partial \sigma} = -C_s + E_s + (F_s)_s \quad (19)$$

$$\frac{\partial P'_s}{\partial t} = -V_s \cdot \nabla P'_s - V_e \cdot \nabla P'_e - \nabla \cdot V_s - \frac{\partial \dot{\sigma}_s}{\partial \sigma} \quad (20)$$

$$\dot{\sigma}_s = \left(\sigma \int_0^1 - \int_0^{\sigma} \right) (V_s \cdot \nabla P'_s + V_e \cdot \nabla P'_e + \nabla \cdot V_s) d\sigma \quad (21)$$

$$(\phi'_{i+1/2})_s = \phi^{*'} + R \sum_{l=i+1/2}^n (T'_l)_s \ln \frac{\sigma_{l+1/2}}{\sigma_{l-1/2}} \quad (22)$$

2.3.2 反对称运动方程组

$$\frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial t} + (\mathbf{V}_A \cdot \nabla) \mathbf{V}_A + (\mathbf{V}_A \cdot \nabla) \mathbf{V}_A + \dot{\sigma}_A \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial \sigma} + \dot{\sigma}_A \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial \sigma} + f \mathbf{K} \times \mathbf{V}_A - \left[\nabla \phi'_A \right. \\ \left. + R(\bar{T} + T'_A) \nabla P'_A + RT'_A \nabla P'_A \right] + F_A \quad (23)$$

$$\frac{\partial T'_A}{\partial t} - \mathbf{V}_A \cdot \nabla T'_A + \mathbf{V}_A \cdot \nabla T'_A + \dot{\sigma}_A \frac{\partial T'_A}{\partial \sigma} + \dot{\sigma}_A \frac{\partial T'_A}{\partial \sigma} = \kappa \left[(\bar{T} + T'_A) \left(\frac{\dot{\sigma}_A}{\sigma} - \frac{\partial \dot{\sigma}_A}{\partial \sigma} - \nabla \cdot \mathbf{V}_A \right) \right. \\ \left. + T'_A \left(\frac{\dot{\sigma}_A}{\sigma} - \frac{\partial \dot{\sigma}_A}{\partial \sigma} - \nabla \cdot \mathbf{V}_A \right) \right] + \frac{Q_A}{c_p} + (F_T)_A \quad (24)$$

$$\frac{\partial q'_A}{\partial t} + \mathbf{V}_A \cdot \nabla q'_A + \mathbf{V}_A \cdot \nabla q'_A + \dot{\sigma}_A \frac{\partial q'_A}{\partial \sigma} + \dot{\sigma}_A \frac{\partial q'_A}{\partial \sigma} = -C_A + E_A + (F_q)_A \quad (25)$$

$$\frac{\partial P'_A}{\partial t} = -\mathbf{V}_A \cdot \nabla P'_A - \mathbf{V}_A \cdot \nabla P'_A - \nabla \cdot \mathbf{V}_A - \frac{\partial \dot{\sigma}_A}{\partial \sigma} \quad (26)$$

$$\dot{\sigma}_A = (\sigma \int_0^1 - \int_0^1) (\mathbf{V}_A \cdot \nabla P'_A + \mathbf{V}_A \cdot \nabla P'_A + \nabla \cdot \mathbf{V}_A) d\sigma \quad (27)$$

$$(\phi'_{k+1/2})_A = \phi^*_A + R \sum_{i=k+1}^k (T'_i)_A \ln \frac{\sigma_{i+1/2}}{\sigma_{i-1/2}} \quad (28)$$

其中 $q' = q - q$, $\kappa = R/c_p$.

2.4 对称运动的不变性

现在,我们来讨论在绝热无耗散的情形下对称运动和反对称运动的性质,为了方便,下面略去上标' $\sim \sigma$ '.

设在初始时刻运动是对称的,则这时 $\partial \mathbf{V}_A / \partial t$, $\partial T'_A / \partial t$, $\partial P'_A / \partial t$, $\dot{\sigma}_A$, $(\phi'_{k+1/2})_A$ 是对称的,而 $\partial \mathbf{V}_A / \partial t$, $\partial T'_A / \partial t$, $\partial P'_A / \partial t$, $\dot{\sigma}_A$, $(\phi'_{k+1/2})_A$ 为零,从而, $\partial \mathbf{V} / \partial t$, $\partial T' / \partial t$, $\partial P' / \partial t$, $\dot{\sigma}$, $\phi_{k+1/2}$ 是对称的.

对方程组(17)~(22)和(23)~(28)作时间微商,易见, \mathbf{V}_A , T'_A , P'_A 的二阶时间微商和 $\dot{\sigma}_A$, $(\phi'_{k+1/2})_A$ 的一阶时间微商也是对称的,而 \mathbf{V}_A , T'_A , P'_A 的二阶时间微商和 $\dot{\sigma}_A$, $(\phi'_{k+1/2})_A$ 的一阶时间微商仍为零.用数学归纳法,设 \mathbf{V}_A 等的 1 到 n 阶时间微商和 $\dot{\sigma}_A$ 等的 1 到 $n-1$ 阶时间微商是对称的,而 \mathbf{V}_A 等的 1 到 n 阶时间微商和 $\dot{\sigma}_A$, $(\phi'_{k+1/2})_A$ 等的 1 到 $n-1$ 阶时间微商为零,则因

$$\frac{\partial^{n+1} \mathbf{V}_A}{\partial t^{n+1}} + \sum_{m=0}^n \frac{n!}{(n-m)! m!} \left\{ \left(\frac{\partial^m \mathbf{V}_A \cdot \nabla}{\partial t^m} \right) \frac{\partial^{n-m} \mathbf{V}_A}{\partial t^{n-m}} + \frac{\partial^m \dot{\sigma}_A}{\partial t^m} \frac{\partial^{n-m+1} \mathbf{V}_A}{\partial \sigma \partial t^{n-m}} \right\} + f \mathbf{K} \times \frac{\partial^n \mathbf{V}_A}{\partial t^n} \\ = - \left(\nabla \frac{\partial^n \phi'_A}{\partial t^n} + R \bar{T} \nabla \frac{\partial^n P'_A}{\partial t^n} \right) - \sum_{m=0}^n R \frac{n!}{(n-m)! m!} \left\{ \frac{\partial^m T'_A}{\partial t^m} \nabla \frac{\partial^{n-m} P'_A}{\partial t^{n-m}} \right\}$$

故 $\partial^{n+1} \mathbf{V}_A / \partial t^{n+1}$ 是对称的.

类似地可以证明: T'_A , P'_A 的 $n+1$ 阶时间微商和 $\dot{\sigma}_A$, $(\phi'_{k+1/2})_A$ 的 n 阶时间微商也是对称的.因

$$\frac{\partial^{n+1} \mathbf{V}_A}{\partial t^{n+1}} + \sum_{m=0}^n \frac{n!}{(n-m)! m!} \left\{ \left(\frac{\partial^m \mathbf{V}_A \cdot \nabla}{\partial t^m} \right) \frac{\partial^{n-m} \mathbf{V}_A}{\partial t^{n-m}} + \dots \right\} + \dots = - \left(\nabla \frac{\partial^n \phi'_A}{\partial t^n} + \dots \right) \\ - \sum_{m=0}^n R \frac{n!}{(n-m)! m!} \left(\frac{\partial^m T'_A}{\partial t^m} \nabla \frac{\partial^{n-m} P'_A}{\partial t^{n-m}} + \dots \right).$$

$\partial^{n+1}V_A/\partial t^{n+1}=0$ 。同理, T'_A, P'_A 的 $n+1$ 阶时间微商为零, $\dot{\sigma}_A, (\phi'_{i+1/2})_A$ 的 n 阶时间微商也为零, 从而, 证明: V, T', P' 的 $n+1$ 阶时间微商和 $\dot{\sigma}, \phi'_{i+1/2}$ 的 n 阶时间微商是对称的。于是,

$$V(\lambda, \varphi, \sigma, t_0+\Delta t) = (V_A)_0 + \left(\frac{\partial V_A}{\partial t}\right)_0 \Delta t + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n V_A}{\partial t^n}\right)_0 \Delta t^n + \dots$$

故 $V(\lambda, \varphi, \sigma, t_0+\Delta t)$ 是对称的。这里 $()_0 = ()|_{t=t_0}$ 。类似地可以证明: $T', P', \dot{\sigma}, \phi'_{i+1/2}$ 在 $t=t_0+\Delta t$ 时也是对称的。

这样一步一步地推下去, 则可以证明: 在 $t \geq t_0$ 的任一时刻, V, T', ϕ', P' 是对称的, 即运动是对称的。

为了以后讨论的方便, 我们不妨称上述结果为‘对称运动的不变性’。

另一方面, 如 $t=t_0$ 时, 运动为反对称的, 则 $|V_A|, T'_A, P'_A, \dot{\sigma}_A, \phi'_A$ 为零, 这时, 方程组(17)–(22)成为

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_A}{\partial t} &= -(\mathbf{V}_A \cdot \nabla) \mathbf{V}_A - \dot{\sigma}_A \frac{\partial V_A}{\partial \sigma} - RT'_A \nabla P'_A \\ \frac{\partial T'_A}{\partial t} &= -\mathbf{V}_A \cdot \nabla T'_A - \dot{\sigma}_A \frac{\partial T'_A}{\partial \sigma} + \kappa T'_A \left(\frac{\dot{\sigma}_A}{\sigma} - \frac{\partial \dot{\sigma}_A}{\partial \sigma} - \nabla \cdot \mathbf{V}_A \right) \\ \frac{\partial P'_A}{\partial t} &= -\mathbf{V}_A \cdot \nabla P'_A \\ \dot{\sigma}_A &= \left(\sigma \int_0^1 - \int_0^\sigma \right) (\mathbf{V}_A \cdot \nabla P'_A d\sigma) \end{aligned}$$

这说明随着时间的推移, 在大气中, 可以产生对称成份的运动, 使原来的反对称运动成为非对称运动。也就是说, 和在正压的情形相似^[1, 2], 在绝热无耗散的多层原始方程模式大气中, 纯粹的反对称运动不能维持, 只可能出现具有反对称成份的运动。这也可以部份地解释, 为什么在实际大气中主要是具有对称成份的运动^[2]。

2.5 推论

利用‘对称运动的不变性’, 在绝热无耗散的情形, 如大气运动在初始时刻是对称的, 我们还可以得到如下推论:

推论1 在时间积分过程中, 和反对称运动有关的谱系数(如果分析的是全球谱模式的话)总等于零。

推论2 对同一模式, 在同一半球范围内, 用全球模式作的预报和以式(15)作为开拓条件的半球模式作的预报相同。

推论3 对于和赤道对称的任意两个地区, 其运动总是彼此对称的。

2.6 对称运动不变性的推广

如果大气是非绝热和有耗散的, 如定义对称运动为

$$(u, v, T', \phi', q', P') = (u_s, v_s, T'_s, \phi'_s, q'_s, P'_s), \quad (29)$$

则在初始时刻运动是对称的, 加热和耗散也都是对称的, 且其对称性不随时间变化的条件下, 用上面的方法, 我们同样可以证明, 所有 V_s, T'_s 等的1到 n 阶时间微商是对称的, 而所有 V_A, T'_A 等的1到 n 阶时间微商为零, 从而, 利用Taylor展式证明‘对称运动的不变性’。

3 在对称地形情形下对模式的检验

3.1 对称性的度量

引用文献[2]中度量某一 σ -面气象要素 M 的全球对称性的量 $S(m)$, 即

$$S(m) = \frac{D(M_s)}{D(M_s) + D(M_A)} \quad (30)$$

其中

$$D(M_s) = \frac{1}{A} \int_A (M_s - \bar{M})^2 dA, \quad D(M_A) = \frac{1}{A} \int_A M_s^2 dA, \quad \bar{M} = \frac{1}{A} \int_A M dA$$

A 表示全球面, dA 是面积元素。

从定义(30)可以看出: 如运动是对称的, 则 $u, \nabla \cdot \mathbf{V}, T', P'$ 等的 S 值均为1, v 和 ζ 的 S 值为零; 如运动一直是对称的, 则这些值保持不变。这些值不妨称之为‘理想值’。

3.2 在对称地形情形对模式的时间积分

为了检验上面的结果, 还用模式进行了时间积分, 积分模式用的是 $T_{21}L_{16}$ 。初始数据取自1979年1月15日, 4月7日, 6月14日和11月15日12时(世界时)的北半球FGGE 8 B资料。地形也是北半球资料。在 t 。时运动设为对称的, 按式(11)和(14)开拓, 可以得到南半球资料。这样得到的初值, 我们不妨称之为‘对称初值’。

模式积分了5天, 其各有关气象要素的 \bar{S} 值, 以及它们随时间的变化如表1所示。从表1中可以看出: 总的来看, ‘对称运动的不变性’从初始时刻一直到第5天仍基本成立。至于表1中对应于 $U (= u \cos \varphi), T', P'$ 和 $D (= \nabla \cdot \mathbf{V})$ 的 \bar{S} 值为什么不严格等于1, 而 $(V = v \cos \varphi)$ 和 ζ 的 \bar{S} 值为什么不严格等于零, 很可能是由于计算误差的积累造成的。

上面的结果说明, 计算和理论一致, 从而说明, 模式设计是合理的, 至少在‘对称运动的不变性’这一点上是这样。

表1 有关各气象要素的 \bar{S} 值*(一)

t	U	V	T'	ζ	D	P'
0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0	1.0
12h	0.999999	0.107135×10^{-4}	1.0	0.121245×10^{-4}	0.999781	1.0
24h	0.999974	0.147102×10^{-4}	0.999998	0.305289×10^{-4}	0.997045	1.0
36h	0.999930	0.499949×10^{-4}	0.999994	0.838902×10^{-4}	0.993389	1.0
48h	0.999865	0.651834×10^{-4}	0.999993	0.163091×10^{-4}	0.991559	1.0
60h	0.999785	0.942332×10^{-4}	0.999988	0.279707×10^{-4}	0.988740	1.0
72h	0.999671	0.196209×10^{-3}	0.999982	0.397180×10^{-4}	0.981155	0.999999
84h	0.999497	0.268437×10^{-3}	0.999972	0.547478×10^{-4}	0.973642	0.999999
96h	0.999323	0.369295×10^{-3}	0.999953	0.730315×10^{-4}	0.967194	0.999999
108h	0.999206	0.408459×10^{-3}	0.999961	0.775576×10^{-4}	0.966793	0.999999
120h	0.999151	0.432183×10^{-3}	0.999957	0.831608×10^{-4}	0.964151	0.999998

* $U = u \cos \varphi, V = v \cos \varphi, D = \nabla \cdot \mathbf{V}, S$ 是各 σ -面 S 的平均。

4 用实际地形对模式作时间积分

4.1 个例的情形

为了使分析接近实际，还用全球实际地形，用1979年1月15日12时的‘对称初值’（除 ϕ' 和 P' 外），用 $T_{2,1}L_{1,5}$ 进行时间积分，其结果如表2所示。

表2 有关各气象要素的 \bar{S} 值*(二)

t	U	V	T'	ζ	D	P'
0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.569574
12h	0.956345	0.096817	0.994207	0.113278×10^{-3}	0.608525	0.558805
24h	0.939125	0.107459	0.990652	0.269478×10^{-3}	0.644915	0.565465
36h	0.921968	0.167385	0.985644	0.493957×10^{-3}	0.620424	0.572313
48h	0.903631	0.240104	0.980127	0.686028×10^{-3}	0.621519	0.576573
60h	0.876362	0.310228	0.975013	0.121961×10^{-1}	0.605188	0.576215
72h	0.855238	0.349851	0.969921	0.151974×10^{-1}	0.576198	0.574808
84h	0.823727	0.384612	0.965453	0.181073×10^{-1}	0.593227	0.578180
96h	0.807972	0.445633	0.960754	0.221686×10^{-1}	0.555537	0.582951
108h	0.779095	0.487708	0.957937	0.269592×10^{-1}	0.569771	0.587125
120h	0.760280	0.473786	0.953962	0.290062×10^{-1}	0.540517	0.589208

*说明和表1相同。

从表2中可以看出：尽管 $t=t_0$ 时， U 、 T' 、 D 仍是对称的， V 、 ζ 仍是反对称的，但很快(12小时) D 变成非对称的，以后 V 、 ζ 的非对称性也越来越明显，只有 T' 的对称性保持较好。这些结果说明，在实际非对称地形情况下，运动从一开始就不是对称的，以后更距离对称运动越来越远。这一方面说明实际地形的非对称性对大气运动的对称性有很大影响，另一方面说明用‘对称运动的不变性’来分析模式的合理性，在这种情况下是不行的。

4.2 分析

为了分析上面的结果，还作了如下计算：

4.2.1 算出 U 、 T' 、 V 、 ζ 在5个 σ -面上的 \bar{S} 值，其结果如图2—5所示。从图中可以看出，在高层大气， U 和 T' 的对称性较好， V 和 ζ 的反对称性较好；而在低层， U 和

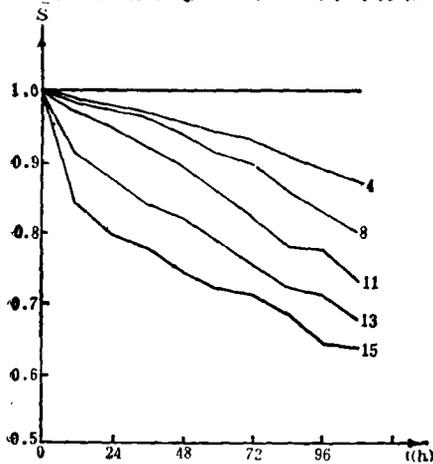


图2 各 σ -面上 U 的 \bar{S} 值随时间的变化
(图中曲线旁的数字表示 σ -面)

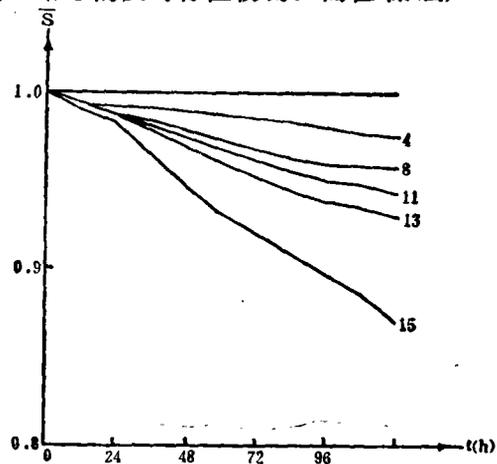


图3 各 σ -上 T' 的 \bar{S} 值随时间的变化
(说明同图2)

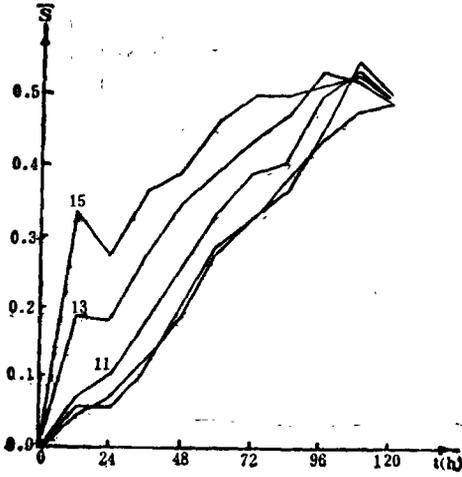


图 4 各 σ -面上 V 的 \bar{S} 值随时间的变化
(说明同图2)

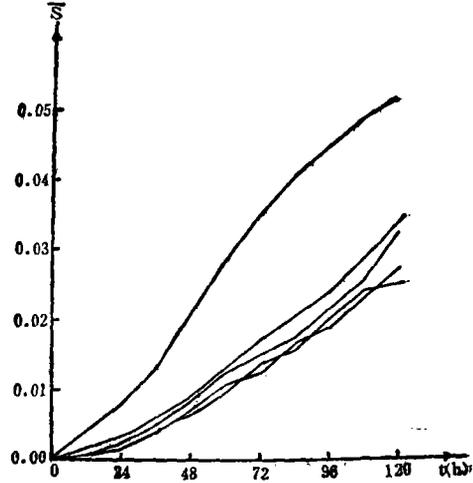


图 5 各 σ -面上 ζ 的 \bar{S} 值随时间的变化
(图中各线自下而上(末端)分别为4,8,13,14,15)

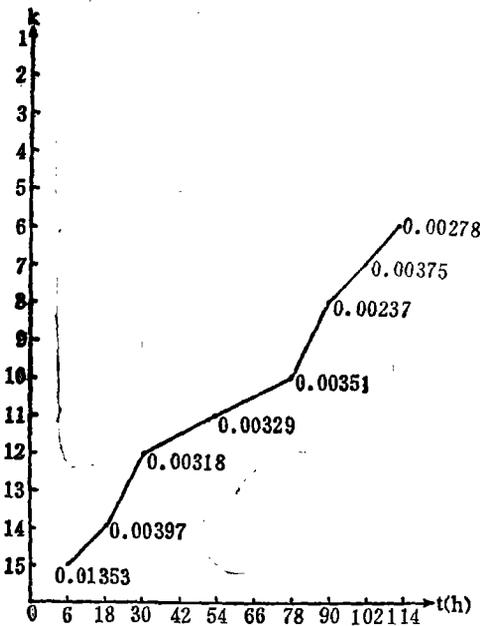


图 6 U 的 \bar{S} 值随时间的变率在时-空剖面上的分布(线旁数字是变率的最大值,单位, h^{-1})

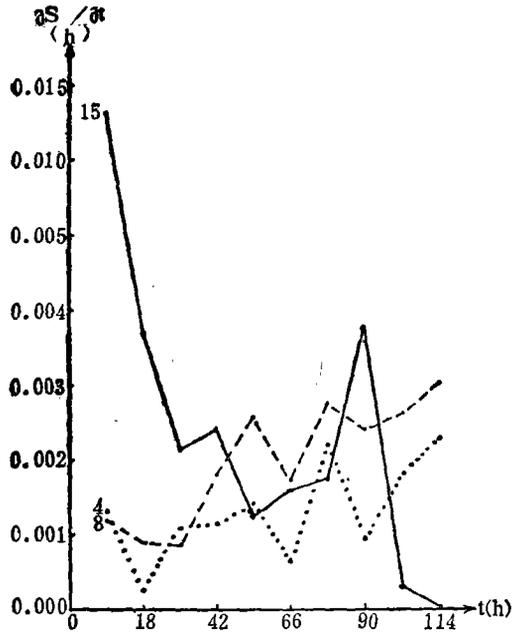


图 7 $k=4, 8, 15$ 的 σ -面的 U 的 \bar{S} 值随时间的变化曲线

T' 的对称差较差, V 和 ζ 的反对称性较差。这说明非对称地形对大气运动对称性的影响越靠近地面越大。

4.2.2 以 U 为代表, 算出其 \bar{S} 随时间的变率的最大值在时空剖面上的分布(图 6)。从图中可以看出, 变率最大值最初在低层, 以后逐渐出现在高层。这说明非对称地形对大气运动对称性的影响是从低层向高层传播的。

还算出了 $k=4, 8, 15$ 的 σ -面的 U 的 \bar{S} 值随时间的变化曲线(图 7)。可以看出, 在

称地形的影响是随时间从下向上传播的,和前面分析的一致。

4.2.3 算出本例24小时和18小时500hPa的温度和用同时间“对称地形”(指用北半球实际地形对称开拓到南半球的地形)得到的相应的温度的差(图8和9)。从图8可以看出,二者的差值呈反对称分布,并成对出现,如格陵兰岛和南极洲附近的南大西洋地区等。其中温度差别最大的地区在西藏高原,有 -11°C 的负中心。

在图9上,48小时温度差仍然呈反对称分布并成对出现,但差值中心和图8相比,大多向东移动了约10个经度。

差值之所以呈反对称分布,看来和在“对称地形”中未考虑或未正确考虑实际地形的反对称成份,而实际地形的反对称成分的数量又和其对称成分相当有关。这也说明了在作半球预报时如采用“对称地形”可能带来的误差。从图8和图9还可以看出,这种误差是不可忽视的,至少在高地地区,如青藏高原,格陵兰和南极大陆是如此。

5 结束语

本文从理论和数值试验证明了‘对称运动的不变性’。利用这个性质可以对模式进行合理性分析,作为检验模式设计、算法和软件的一种方法。比如,根据 S 值可以估计总体上是否有误(如偏离理想值较远等);根据个别地区某些气象要素或谱系数的对称性可以估计有关算法或软件是否有误等。当然,这种方法不是万能的,不可能靠它检查出所有的错误。而且,使用这种方法还有一定的限制,如绝热无耗散、对称初值(包括对称地形)等等。这是其一个缺点。不过,和其他分析方法相比,这些限制就显得很松了。还有,它毕竟只是个定性的方法,只能说明什么地方可能有错,不能说明错到什么程度,这是使用时应当注意的。

还应提出,对称运动等的性质还不仅是‘对称运动的不变性’,其他的性质,如对称运动和反对称运动动能之间的相互转换等^[3],也是可以用来检验模式设计的合理性的,这里我们就不讨论了。

参考文献

- [1] 廖洞贤, 邹晓蕾. 正压过滤模式大气中的对称运动和非对称运动. 气象学报, 1986, 44(1): 28—37.
- [2] 余海安, 廖洞贤. 关于正压大气对称运动和非对称运动的数值试验. 气象学报, 1990, 48(4): 284—292.
- [3] Liao D. The asymmetric motion in the atmosphere and long-range weather prediction. Proceedings on the 1st WMO Workshop on the Diagnosis and Prediction of Monthly and Seasonal Atmospheric Variations over the Globe, Long-Range Forecasting Research Report Series, II, 6, WMO/TD-NO. 87, 530—536, 1986.
- [4] 廖洞贤. 论半球预报的水平侧边界条件. 第二次全国数值天气预报会议文集. 科学出版社, 1980, 226—236.
- [5] Louis J F. ECMWF Forecast Model Documentation Manual, 1981, 1.

REASONABLENESS ANALYSIS OF THE DYNAMIC FRAME OF A MULTILEVEL PRIMITIVE EQUATION MODEL

Wang Shiwen Liao Dongxian

(*National Meteorological Center, State Meteorological Administration, Beijing 100081*)

Abstract

This paper consists of two parts, namely, theoretical bases and numerical analysis. In the first part, it has been proved by using a multilevel primitive equation model that if the atmospheric motion be symmetric at the initial instant t_0 in the case of symmetric orography, then the motion would be kept in the symmetric state at any instant $t > t_0$. This also has been verified by numerical experiments in the second part. Therefore, it can be used as the base of analysing the reasonableness of the dynamic frame of a multilevel primitive equation model.

However, if real orography is considered, the symmetry of the atmospheric motion would much be reduced. The main areas affected are the highlands in the Northern Hemisphere and the lowlands at the same latitudes of those highlands in the Southern Hemisphere. Furthermore, such reduction is gradually propagated from low level to high level.

Key Words: Atmosphere, Primitive equation model, Reasonableness.