

非纬向基流的非线性斜压不稳定*

陆维松 杨 松

(南京气象学院)

提 要

本文从含 Ekman 摩擦的非线性两层斜压模式出发,应用 Serrin-Joseph 的能量方法,按变分原理,分别用扰动总能量、总位涡拟能和两者的线性组合导得了非纬向基流的非线性斜压稳定性判据。并和线性判据作了比较。

一、引 言

在实际大气中,大气的基本气流并非是纯纬向环流,有时经向基本气流可以很强,特别超长波活动较强和低指数环流时,更是如此。因此,仅仅研究纬向基流的斜压稳定性显然是不够的,还需要研究非纬向基流的斜压稳定性问题。

Pedlosky^[1](1979)研究了非纬向基流的线性斜压不稳定,用两层模式讨论了海洋中运动情况。李崇银^[2](1984)用更为一般的非纬向基流讨论了线性斜压不稳定。Henrotay^[3](1983)应用 Serrin 的能量方法,讨论了含 Ekman 摩擦的纬向基流的非线性斜压稳定性问题。作者^[4]应用复共轭积分法,将 Serrin 能量方法推广到基流随 y 变化的情况。由于实际大气基流一般是非纬向,且是非线性和有摩擦的,加之当前国际气象界对低指数环流的阻塞形势倍加关注,研究很多。因此,同时考虑这几种因子的斜压稳定性是很有意义的。本文用两层斜压模式,研究含 Ekman 摩擦的非纬向基流的非线性斜压不稳定。

二、线性稳定性问题

两层模式的非线性准地转位涡方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial q_1}{\partial t} + J(\psi_1, q_1) = -\gamma \nabla^2 \psi_1 + N_1 \\ \frac{\partial q_2}{\partial t} + J(\psi_2, q_2) = -\gamma \nabla^2 \psi_2 + N_2 \end{cases} \quad (1)$$

式中已设上、下边界是刚壁,位涡 $q_n = \nabla^2 \psi_n + \beta y + F_n (-1)^n (\psi_1 - \psi_2)$, $F_n = \frac{f_0^2 L^2}{g D_n (\Delta \rho / \rho_0)}$

* 本文于 1989 年 10 月 14 日收到, 1990 年 1 月 9 日收到修改稿。该文是国家自然科学基金资助项目。

为 Froude 数, $\Delta\rho/\rho_0 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_0}$, 且 $n=1, 2$, L 是几何长度尺度, ρ_1, ρ_2 分别为第一、二层的密度, ρ_0 是大气密度的特征量, D_1, D_2 分别为第一、二层的大气厚度, N_1, N_2 分别为第一、二层的非绝热加热项。 $\gamma = \frac{\sqrt{E_v}}{\varepsilon}$ 为 Ekman 摩擦系数, E_v, ε 分别为垂直 Ekman 数和 Rossby 数。

令两层的流函数分别为

$$\begin{cases} \psi_1 = -U_1 y + V_1 x + \phi_1(x, y, t) = \bar{\psi}_1 + \phi_1 \\ \psi_2 = -U_2 y + V_2 x + \phi_2(x, y, t) = \bar{\psi}_2 + \phi_2 \end{cases} \quad (2)$$

式中 $\bar{\psi}_1 = -U_1 y + V_1 x$, $\bar{\psi}_2 = -U_2 y + V_2 x$, U_1, U_2, V_1, V_2 均取常数, 而 ϕ_1 和 ϕ_2 表示运动的扰动部分, $\bar{\psi}_1$ 和 $\bar{\psi}_2$ 表示基本运动状态。(2) 式代入(1)式, 得线性化方程

$$\frac{\partial q_1'}{\partial t} + J(\bar{\psi}_1, q_1') + J(\phi_1, \bar{q}_1) = -\gamma \nabla^2 \phi_1 \quad (3)$$

$$\frac{\partial q_2'}{\partial t} + J(\bar{\psi}_2, q_2') + J(\phi_2, \bar{q}_2) = -\gamma \nabla^2 \phi_2 \quad (4)$$

式中扰动位涡 $q_n' = \nabla^2 \phi_n + F_n (-1)^n (\phi_1 - \phi_2)$, 平均位涡 $\bar{q}_n = \beta y + F_n (-1)^n [-(U_1 - U_2)y + (V_1 - V_2)x]$, 已设 $N_1 = \bar{N}_1$ 和 $N_2 = \bar{N}_2$, \bar{N}_1 和 \bar{N}_2 满足基本量方程 (对应 $N_1' = N_2' = 0$)

$$\begin{cases} \beta V_1 + F_1(U_1 V_2 - U_2 V_1) = \bar{N}_1 \\ \beta V_2 + F_2(U_2 V_1 - U_1 V_2) = \bar{N}_2 \end{cases} \quad (5)$$

基流由非绝热加热所决定, 当 $\bar{N}_1 = \bar{N}_2 = 0$ 时, 由上式可得 $V_1 = -\frac{F_1}{F_2} V_2$, $U_1 = (\beta F_2 - F_1 U_2)/F_1$, 此时, V_1 与 V_2, U_1 与 U_2 不再相互独立。令

$$\phi_n = A_n \exp\{i(kx + ly - \omega t)\} \quad (n=1, 2) \quad (6)$$

代入(3)、(4)两式得

$$A_1[(c - U_1^*)(K^2 + F_1) + \tilde{\beta} + F_1 U_T^* + i\gamma K] - A_2 F_1 (c - U_1^*) = 0 \quad (7)$$

$$A_2[(c - U_2^*)(K^2 + F_2) + \tilde{\beta} - F_2 U_T^* + i\gamma K] - A_1 F_2 (c - U_2^*) = 0 \quad (8)$$

其中已令

$$\begin{cases} c = \frac{\omega}{K}, K^2 = k^2 + l^2, \tilde{\beta} = \beta k/K = \beta \cos\theta \\ U_n^* = \frac{U_n k + V_n l}{K} = (U_n^2 + V_n^2)^{1/2} \cos(\alpha_n - \theta) \quad (n=1, 2) \\ U_T^* = U_1^* - U_2^* = \frac{U_T k + V_T l}{K}, \quad U_T = U_1 - U_2, V_T = V_1 - V_2 \end{cases} \quad (9)$$

式中 θ 是波矢量 \mathbf{K} 和 x 轴的交角, 而 α_1, α_2 分别为上下层基流与 x 轴的交角, U_n^* 是基流在波矢量方向上的投影。由(7)、(8)两式, 得波速

$$c = U_2^* + \frac{U_T^* K^2 (K^2 + 2F_2) - \tilde{\beta} (2K^2 + F_1 + F_2)}{2K^2 (K^2 + F_1 + F_2)} - i\gamma \frac{2K^2 + F_1 + F_2}{2K (K^2 + F_1 + F_2)} \pm \frac{(\Delta_1 + i\Delta_2)^{1/2}}{2K^2 (K^2 + F_1 + F_2)} \quad (10)$$

$$\text{式中} \begin{cases} \Delta_1 = \tilde{\beta}^2 (F_1 + F_2)^2 + 2 \tilde{\beta} K^4 U_T^* (F_1 - F_2) + K^4 U_T^{*2} (K^4 - 4 F_1 F_2) - \gamma^2 K^2 (F_1 + F_2)^2 \\ \Delta_2 = 2 \gamma K [\tilde{\beta} (F_1 + F_2)^2 + K^4 U_T^* (F_1 - F_2)] \end{cases} \quad (11)$$

1. $V_1 = V_2 = 0, \tilde{\beta} = 0, F_1 = F_2 = F$. 则(10)式与文献[1]中结果相同。

2. $\gamma = 0$, 则(10)式与文献[2]中结果相同。

3. 对于一般情况, 由(10)式可得稳定性条件为

$$\text{Im}[(\Delta_1 + i\Delta_2)^{1/2}] \leq \gamma K (2K^2 + F_1 + F_2) = a \quad (12)$$

$$\text{或} \quad \Delta_2^2 \leq 4a^2(\Delta_1 + a^2) \quad (13)$$

$$\text{即} \quad f(U_T^*) = \alpha_1 U_T^{*2} + \alpha_2 U_T^* + \alpha_3 \geq 0 \quad (14)$$

$$\text{式中} \begin{cases} \alpha_1 = K^2 [K^6 - F_1 F_2 (3K^2 + F_1 + F_2)], \alpha_2 = 2K^4 \tilde{\beta} (F_1 - F_2) \\ \alpha_3 = \tilde{\beta}^2 (F_1 + F_2)^2 + \gamma^2 K^2 (2K^2 + F_1 + F_2)^2 \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{因} \quad \alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3 &= 4K^2 \{ \tilde{\beta}^2 F_1 F_2 [(F_1 + F_2)^2 (3K^2 + F_1 + F_2) - 4K^6] + \gamma^2 K^2 (2K^2 + F_1 + F_2) \\ &\quad + F_2)^2 [F_1 F_2 (3K^2 + F_1 + F_2) - K^6] \} \\ &= 4K^2 [4\tilde{\beta}^2 F_1 F_2 + \gamma^2 K^2 (2K^2 + F_1 + F_2)^2] [b F_1 F_2 (3K^2 + F_1 + F_2) - K^6] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{式中} \quad b = \frac{\tilde{\beta}^2 (F_1 + F_2)^2 + \gamma^2 K^2 (2K^2 + F_1 + F_2)^2}{4\tilde{\beta}^2 F_1 F_2 + \gamma^2 K^2 (2K^2 + F_1 + F_2)^2}, \text{ 因 } \frac{\partial b}{\partial K^2} < 0, \text{ 随 } K^2 \text{ 单调减小, 注意}$$

$(F_1 + F_2)^2 \geq 4F_1 F_2$, 则对于 $\infty > K^2 \geq 0$, 对应 $1 \leq b \leq \frac{(F_1 + F_2)^2}{4F_1 F_2}$. 由(14)、(15)、(16)三式可得:

1 当 $K^6 > b F_1 F_2 (3K^2 + F_1 + F_2)$ 时, 包括 $K^6 > \frac{(F_1 + F_2)^2}{4} (3K^2 + F_1 + F_2)$, 有 $\alpha_1 > 0$ 且 $\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3 < 0$, 则 $f(U_T^*) > 0$ 总成立, 扰动总是稳定的。

2 当 $F_1 F_2 (3K^2 + F_1 + F_2) \leq K^6 \leq b F_1 F_2 (3K^2 + F_1 + F_2)$ 时, 有 $\alpha_1 > 0$ 且 $\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3 \geq 0$, 则对于 $F_1 > F_2 (F_1 < F_2)$, 有 $B_1 < A_1 < 0 (0 < B_1 < A_1)$, 从而当 $U_T^* \leq B_1$ 或 $U_T^* \geq A_1$ 时, $f(U_T^*) \geq 0$ 成立, 扰动稳定。

3 当 $K^6 < F_1 F_2 (3K^2 + F_1 + F_2)$ 即 $K^2 < \sqrt[3]{F_1^2 F_2} + \sqrt[3]{F_1 F_2^2}$ 时, 有 $\alpha_1 < 0$ 且 $\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3 > 0$, 则对于 $F_1 > F_2$ 或 $F_1 < F_2$, 均有 $A_1 < 0 < B_1$, 从而当 $A_1 \leq U_T^* \leq B_1$ 时, $f(U_T^*) > 0$ 成立, 扰动稳定。

上式中 A_1, B_1 为方程 $f(U_T^*) = 0$ 的两个实根, 即

$$A_1 = -\frac{\alpha_2}{2\alpha_1} + \frac{\sqrt{\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3}}{2\alpha_1} \quad B_1 = -\frac{\alpha_2}{2\alpha_1} - \frac{\sqrt{\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3}}{2\alpha_1} \quad (17)$$

由上述 1—3 情况可见, K 较大, 波长较短的波总是稳定的; 而仅当 K 较小, 波长较长的波才可能出现斜压不稳定, 这定性观测事实一致。注意 $F_n = \left(\frac{L}{R_n}\right)^2$, $R_n = \frac{1}{f_n}$

$\left(g \frac{\Delta\rho}{\rho_0} D_n\right)^{1/2}$ 为变形半径, L 也可看作波长。 $F_1 > F_2 (F_1 < F_2)$ 对应于 $D_1 < D_2 (D_1 > D_2)$ 。情况 1 表示短波截断, 与通常稳定性结果类似。情况 2 中因一般总有 $U_T^* > 0$, 则对于 $F_1 > F_2$, 此时总是稳定的; 而对于 $F_1 < F_2$, 当 $B_1 < U_T^* < A_1$ 时, 出现不稳定, 即适中的热成风 U_T^* 才会产生不稳定。情况 3 表示 $U_T^* > B_1$ 才可能出现不稳定, 而与上、下层厚度

无关, 临界热成风为 $U_c^* = B_1$ 。

若不考虑 β 效应, $\tilde{\beta} = 0$, 则(15)式化为

当 $K^2 > \sqrt[3]{F_1^2 F_2} + \sqrt[3]{F_1 F_2^2}$ 时, $f(U_T^*) > 0$, 总是稳定的;

当 $K^2 < \sqrt[3]{F_1^2 F_2} + \sqrt[3]{F_1 F_2^2}$ 时, 且

$$U_T^* < U_c^* = \frac{\gamma(2K^2 + F_1 + F_2)}{[F_1 F_2(3K^2 + F_1 + F_2) - K^6]^{1/2}} \quad (18)$$

则 $f(U_T^*) > 0$, 为稳定。反之亦然, $U_T^* > U_c^*$ 为不稳定。由 U^* 的定义, 从(18)式得对应的椭圆方程为

$$U_c/a_4^2 + V_c/b_4^2 = 1 \quad (19)$$

$$\text{式中 } a_4^2 = \frac{\gamma K(2K^2 + F_1 + F_2)}{k[F_1 F_2(3K^2 + F_1 + F_2) - K^6]^{1/2}}, \quad b_4^2 = \frac{\gamma K(2K^2 + F_1 + F_2)}{l[F_1 F_2(3K^2 + F_1 + F_2) - K^6]^{1/2}} \quad (20)$$

将(19)式绘为图 1 和图 2 中的单点划线。且对应于 $\frac{K^2}{F_1 + F_2} = 0.1, 0.3, 0.5, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0.8,$

1.0, 分别取 $\frac{F_1}{K^2} = 6.0, 2.0, 1.2, 0.8, 0.7, 0.5$ 。因 a_4 的分母中 $k = (K^2 - l^2)^{1/2}$, 存在长波

截断 $K^2 > l^2$ 。因此, 线性判据中不稳定波的波数范围为 $l^2 < K^2 < \sqrt[3]{F_1^2 F_2} + \sqrt[3]{F_1 F_2^2}$ 。

为直观起见, 取图 1 (b) 中 $\frac{K^2}{F_1 + F_2} = 0.3$, 对应 $\frac{l^2}{F_1 + F_2} = 0.25$, $\frac{K^2}{F_1} = 0.5$, $\frac{K^2}{F_2} = 0.75$,

此时临界经向热成风 V_c 接近其最小值, 也即对应波数接近最不稳定波数。取 $F_2 = 4.0$,

则 $F_1 = 6.0$, $k \approx 0.707$, $l \approx 1.581$, 因 $k = \frac{2\pi L_o}{L_x}$, $l = \frac{2\pi L_o}{L_y}$, $L_o \sim 10^6 \text{m}$, 则对应波长为

$$L_x \approx 8.9 L_o, \quad L_y \approx 4.0 L_o, \quad \text{对应的临界热成风为 } U_c = 2.93^2 \frac{\gamma \sqrt{F_1 + F_2}}{\sqrt{F_1 F_2}} \approx 0.22 - 0.67,$$

$V_c \approx 0.04 - 0.13$, 已经取旋转减弱时间为 $\tau = 10 - 30 \text{d}$, 即 $\gamma \approx 0.04 - 0.12$ 。有量纲的临界热成风为 $\hat{U}_c = 2.2 - 6.7 \text{(m/s)}$, $\hat{V}_c = 0.4 - 1.3 \text{m/s}$ 。由此临界热成风可见, 实际大气容易满足此 \hat{V}_c , \hat{U}_c , 且 \hat{V}_c 比 \hat{U}_c 小得多, 这说明考虑了非纬向基流比纬向基流更容易不稳定。

三、非线性稳定性问题

由(1)、(2)两式得非线性扰动准地转位涡方程为

$$\frac{\partial q_n'}{\partial t} + J(\bar{\psi}_n, q_n') + J(\phi_n, \bar{q}_n) + J(\phi_n, q_n') = -\gamma \nabla^2 \phi_n \quad (n=1, 2) \quad (21)$$

用 $F_2 \phi_1$, $F_1 \phi_2$ 分别乘(21)式 $n=1, 2$ 的两边, 并对 x 在其一个波长和对 y 在其一个波长作积分, 且用角括号表示对 x, y 的积分, 得扰动总能量方程

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma D_E + P_E \quad (22)$$

$$\text{式中} \begin{cases} E = \frac{1}{2} \langle F_2 |\nabla \phi_1|^2 + F_1 |\nabla \phi_2|^2 + F_1 F_2 |\phi_1 - \phi_2|^2 \rangle, & D_E = \langle F_2 |\nabla \phi_1|^2 + F_1 |\nabla \phi_2|^2 \rangle \\ P_E = \frac{1}{2} F_1 F_2 \left\langle U_T \left(\phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} - \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) + V_T \left(\phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial y} - \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \right\rangle \end{cases} \quad (23)$$

D_E 为能量耗散项(正定), P_E 为能量产生项(不定号)。显然, 当能量产生项 P_E 大于能量耗散项 γD_E , 则扰动总能量 E 随时间增大, 即为非线性不稳定; 反之, 当能量产生项 P_E 小于能量耗散项, 则扰动总能量 E 随时间减小, 即为非线性稳定; 而 P_E 与 γD_E 两者相等, 为边缘稳定。令

$$\gamma_1^* = \left(\frac{P_E}{D_E} \right)_{\max} \quad (24)$$

则(22)式化为

$$\frac{dE}{dt} \leq -(\gamma - \gamma_1^*) D_E \quad (25)$$

当 $\gamma > \gamma_1^*$ 时, 则

$$\frac{dE}{dt} < 0 \quad (26)$$

可见, $\gamma > \gamma_1^*$ 是平均稳定的充分条件^[5]。因 γ_1^* 为 P_E 和 D_E 之比的极大值, 可将此问题化为变分原理

$$\delta(D_E - \mu P_E) = 0 \quad (27)$$

式中 δ 为变分算符, μ 为 Lagrange 乘子。(27)式对应一个本征值问题, 对于本征函数 ϕ , 本征值 μ 满足方程 $\frac{1}{\mu} = \frac{P_E}{D_E}$ 。

由(27)式可得 Euler-Lagrange 方程

$$\nabla^2 \phi_1 + \frac{\mu F_1}{2} \left(U_T \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + V_T \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) = 0 \quad (28)$$

$$\nabla^2 \phi_2 - \frac{\mu F_2}{2} \left(U_T \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + V_T \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) = 0 \quad (29)$$

这个线性方程组容易求解, 利用波动解(6)式, 代入(28)、(29)两式得

$$\mu^2 = \frac{4 K^2}{F_1 F_2 U_T^{*2}} \quad (30)$$

则由前面的讨论可知, 当波数 k, l 给定时, 稳定性的充分条件为

$$\gamma > \gamma_1^* = \frac{\sqrt{F_1 F_2} U_T^*}{2 K} \quad (31)$$

此关系式还可化为

$$U_T^* < \frac{2 K \gamma}{\sqrt{F_1 F_2}} \quad \text{或} \quad U_T^* < U_c^* \quad (32)$$

而 U_c^* 满足 $U_c^* = \frac{2 K \gamma}{\sqrt{F_1 F_2}}$, 利用 U_T^* 的定义(9)式得

$$U_c / a^2 + V_c / b_1^2 = 1 \quad (33)$$

式中 $a_1^2 = \frac{2K^2\gamma}{k\sqrt{F_1F_2}}$, $b_1^2 = \frac{2K^2\gamma}{l\sqrt{F_1F_2}}$ 。临界热成风 U_c, V_c 满足椭圆方程。由(31)、

(32)两式可见,当 U_T^* 较小, K 较大, (31)、(32)两个不等式容易满足,即基流热成风在波矢上的投影的数值较小,波长较短的波容易稳定。反之,当基流热成风较大,波长较长的波容易不稳定。这与观测事实是一致的。而能量判据(32)式与线性判据(14)式,无论有无 β 效应,两者均有较大差别。

类似地,由(21)式得扰动总位涡拟能方程为

$$\frac{dQ}{dt} = -\gamma D_Q + P_Q \quad (34)$$

$$\text{式中} \begin{cases} Q = \frac{1}{2} \langle F_2 (q'_1)^2 + F_1 (q'_2)^2 \rangle, & D_Q = \langle F_2 |\nabla^2 \phi_1|^2 + F_1 |\nabla^2 \phi_2|^2 + F_1 F_2 |\nabla(\phi_1 - \phi_2)|^2 \rangle \\ P_Q = F_1 F_2 \langle F_2 \phi_1 \left(U_T \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + V_T \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) - F_1 \phi_2 \left(U_T \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + V_T \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \rangle \end{cases} \quad (35)$$

D_Q 为总位涡拟能消耗项, P_Q 为总位涡拟能产生项。令

$$\gamma_2^* = \left(\frac{P_Q}{D_Q} \right)_{\max} \quad (36)$$

$$\text{有} \quad \frac{dQ}{dt} \leq -D_Q (\gamma - \gamma_2^*) \quad (37)$$

则当 $\gamma > \gamma_2^*$ 时,扰动总是稳定的。极大值问题(36)式仍可化为变分问题

$$\delta(D_Q - \mu P_Q) = 0 \quad (38)$$

上式对应的 Euler-Lagrange 方程为

$$\nabla^4 \phi_1 - F_1 \nabla^2 (\phi_1 - \phi_2) - \frac{\mu F_1}{2} (F_1 + F_2) \left(U_T \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + V_T \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) = 0 \quad (39)$$

$$\nabla^4 \phi_2 + F_2 \nabla^2 (\phi_1 - \phi_2) + \frac{\mu F_2}{2} (F_1 + F_2) \left(U_T \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + V_T \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) = 0 \quad (40)$$

(6)式代入(39)、(40)两式得

$$\mu^2 = \frac{4K^4(K^2 + F_1 + F_2)}{F_1 F_2 (F_1 + F_2)^2 U_T^{*2}} \quad (41)$$

则稳定性的充分条件为

$$\gamma > \gamma_2^* = \frac{\sqrt{F_1 F_2} (F_1 + F_2) U_T^*}{2K^2 (K^2 + F_1 + F_2)^{1/2}} \quad (42)$$

$$\text{或 } U_T^* < U_c^* \quad \text{而} \quad U_c^* = \frac{2\gamma K^2 (K^2 + F_1 + F_2)^{1/2}}{\sqrt{F_1 F_2} (F_1 + F_2)} \quad (43)$$

仍可将上式化为椭圆方程的形式

$$U_c/a_2^2 + V_c/b_2^2 = 1 \quad (44)$$

$$\text{式中} \quad a_2^2 = \frac{2K^3(K^2 + F_1 + F_2)^{1/2}\gamma}{k\sqrt{F_1 F_2} (F_1 + F_2)}, \quad b_2^2 = \frac{2K^3(K^2 + F_1 + F_2)^{1/2}\gamma}{l\sqrt{F_1 F_2} (F_1 + F_2)} \quad (45)$$

由(42)、(43)两式仍可得能量判据类似的结果,即基流热成风较大,波长较长的波才容易发生不稳定。但此处与能量判据不同之处, γ_2^* 以 $K^2(K^2 + F_1 + F_2)^{1/2}$ 作为其分母,而

γ_1^* 以 K 作为分母, 显然, 当 $K \rightarrow \infty$ 或 $K \rightarrow 0$ 时, γ_2^* 与 γ_1^* 相比趋于零或无穷的速度要快得多, 因此, 涡度拟能判据对波长的约束比能量判据强得多。

按照 Joseph 方法^[6,7], 用一个正常数 λ 将扰动总能量和扰动总位涡拟能线性耦合起来, 构成一个新的正定量, 作为李氏函数, 来讨论非线性稳定性的最优判据。(22)式 + $\lambda \times$ (34)式, 得

$$\frac{dE_\lambda}{dt} = -\gamma D_\lambda + P_\lambda \quad (46)$$

式中 $E_\lambda = E + \lambda Q$, $D_\lambda = D_E + \lambda D_Q$, $P_\lambda = P_E + \lambda P_Q$ (47)

令 $\gamma_3^* = \left(\frac{P_\lambda}{D_\lambda} \right)_{\max}$ (48)

有 $\frac{dE_\lambda}{dt} \leq -D_\lambda(\gamma - \gamma_3^*)$ (49)

则当 $\gamma > \gamma_3^*$ 时, 扰动总是稳定的。极大值问题(48)式仍化为变分问题

$$\delta(D_\lambda - \mu P_\lambda) = 0 \quad (50)$$

上式对应的 Euler-Lagrange 方程为

$$\lambda \nabla^4 \phi_1 - \nabla^2 \phi_1 - \lambda F_1 \nabla^2 (\phi_1 - \phi_2) - \frac{\mu F_1}{2} [1 + \lambda (F_1 + F_2)] \left(U_T \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + V_T \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) = 0 \quad (51)$$

$$\lambda \nabla^4 \phi_2 - \nabla^2 \phi_2 + \lambda F_2 \nabla^2 (\phi_1 - \phi_2) + \frac{\mu F_2}{2} [1 + \lambda (F_1 + F_2)] \left(U_T \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + V_T \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) = 0 \quad (52)$$

显然, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 由(51)、(52)两式得能量变分问题; 而当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, 由(51)、(52)两式得位涡拟能变分问题。

仍将波解(6)式代入(51)、(52)两式, 得

$$\mu^2 = \frac{4 K^2 (\lambda K^2 + 1) [\lambda (K^2 + F_1 + F_2) + 1]}{F_1 F_2 U_T^2 [1 + \lambda (F_1 + F_2)]^2} \quad (53)$$

此处正常数 λ 仍是自由参数, 为了获得最优判据, 我们将选择 λ 使得 $\mu(\lambda)$ 达到极大值, 或 $\frac{1}{\mu}$ 达到极小值。则

$$1 \quad \lambda = \frac{2 K^2 - (F_1 + F_2)}{(F_1 + F_2)^2 - 2 K^4} \quad \text{当} \quad \frac{1}{2} (F_1 + F_2) < K^2 < \frac{\sqrt{2}}{2} (F_1 + F_2) \quad (54)$$

注意 λ 必须为正数。

$$2 \quad \lambda = 0 \quad \text{当} \quad K^2 \leq \frac{1}{2} (F_1 + F_2) \quad (55)$$

$$3 \quad \lambda \rightarrow \infty \quad \text{当} \quad K^2 \geq \frac{\sqrt{2}}{2} (F_1 + F_2) \quad (56)$$

我们分别考虑这三种情况的稳定性判据, 因 $\frac{1}{\mu} \leq \gamma_3^*$, 则 $\gamma > \gamma_3^*$ 为非线性稳定性的充分条件, 临界热成风满足 $U_T^* < U_c^*$ 。

情况1, (54)式对应的稳定性条件为

$$\gamma > \gamma_3^* = \frac{\sqrt{F_1 F_2} U_T^* [(F_1 + F_2) - K^2]^{1/2}}{F_1 + F_2} \quad (57)$$

或
$$U_T^* < U_c^* = \frac{\gamma (F_1 + F_2)}{\sqrt{F_1 F_2} [(F_1 + F_2) - K^2]^{1/2}} \quad (58)$$

类似地由上式可得椭圆方程为

$$U_c/a_3^2 + V_c/b_3^2 = 1 \quad (59)$$

式中
$$a_3^2 = \frac{\gamma K (F_1 + F_2)}{k \sqrt{F_1 F_2} [(F_1 + F_2) - K^2]^{1/2}}, \quad b_3^2 = \frac{\gamma K (F_1 + F_2)}{l \sqrt{F_1 F_2} [(F_1 + F_2) - K^2]^{1/2}} \quad (60)$$

由(57)、(58)两式可见, γ_3^* 与 U_T^* 成正比, 结论与前相同, 即基流热成风较大易于不稳定。而此处 K 须满足(54)式的不等式, 但在此不等式范围内, 仍有 K 越大, γ_3^* 越小, 容易稳定, 而 K 越小, γ_3^* 越大, 容易不稳定。这仍与前相似, 但 γ_3^* 随 K 的变化速率不大相同。

情况2, (55)式对应的稳定性条件为能量判据(31)式, 且仅对 $K^2 \leq \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$ 的波数域有效, 即仅对波长较长的波有效。当 $K^2 = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$ 时, 能量判据与情况1的稳定性判据(58)式的稳定性曲线相交。

情况3, (56)式对应的稳定性条件为位涡拟能判据(42)式, 仅对 $K^2 \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(F_1 + F_2)$ 的波数域, 即波长较短的波有效。当 $K^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(F_1 + F_2)$ 时, 位涡拟能与情况1两者的稳定性曲线相交。

这三种情况所得结果都与线性情况不同, 且都不含 β 效应。为了便于比较, 在线性判据中略去 $\tilde{\beta}$, 采用了(19)、(20)两式。稳定性曲线由图1(a)、(b)、(c)和图2(a)、(b)表示。由图1和图2可见, 线性判据的临界热成风 U_c, V_c 和椭圆长短轴 a_n^2, b_n^2 均大于能量判据、位涡拟能判据和 λ 判据这三种判据对应的值。这与Henrotay在文献[3]中讨论纬向基流的非线性斜压不稳定有些不同, 在文献[3]中纬向基流的情况下, 线性判据的 U_c 有一部分与 λ 判据重合, 而本文非纬向基流则不存在这种重合, 有时仅数值比较靠近, 但不相等。比较(18)与(58)式, 这两式并不完全相同, 而对纬向基流这两式是相同的, 这也进一步证实上述结果。这一结果表明, 线性稳定的扰动可能是非线性不稳定的。当扰动很小时, 按线性理论即可, 而当扰动比较大时, 非线性效应不能忽略, 且变得重要, 按线性理论, 此较大扰动稳定, 而实际上此扰动可能已超出线性吸引子的吸引域, 成为非线性不稳定。因此, 对于任意大小扰动的稳定性, 本文的非线性判据显然优于线性判据, 可以消除线性判据的误判。因为只有不仅是线性稳定的而且是非线性稳定的吸引子才是真正稳定的。这一结果也说明了非纬向基流比纬向基流更容易不稳定。另一方面, 线性判据中出现了短波截断 $K^6 < F_1 F_2 (3K^2 + F_1 + F_2)$ 和长波截断 $K^2 > l^2$, 其不稳定的波数范围为

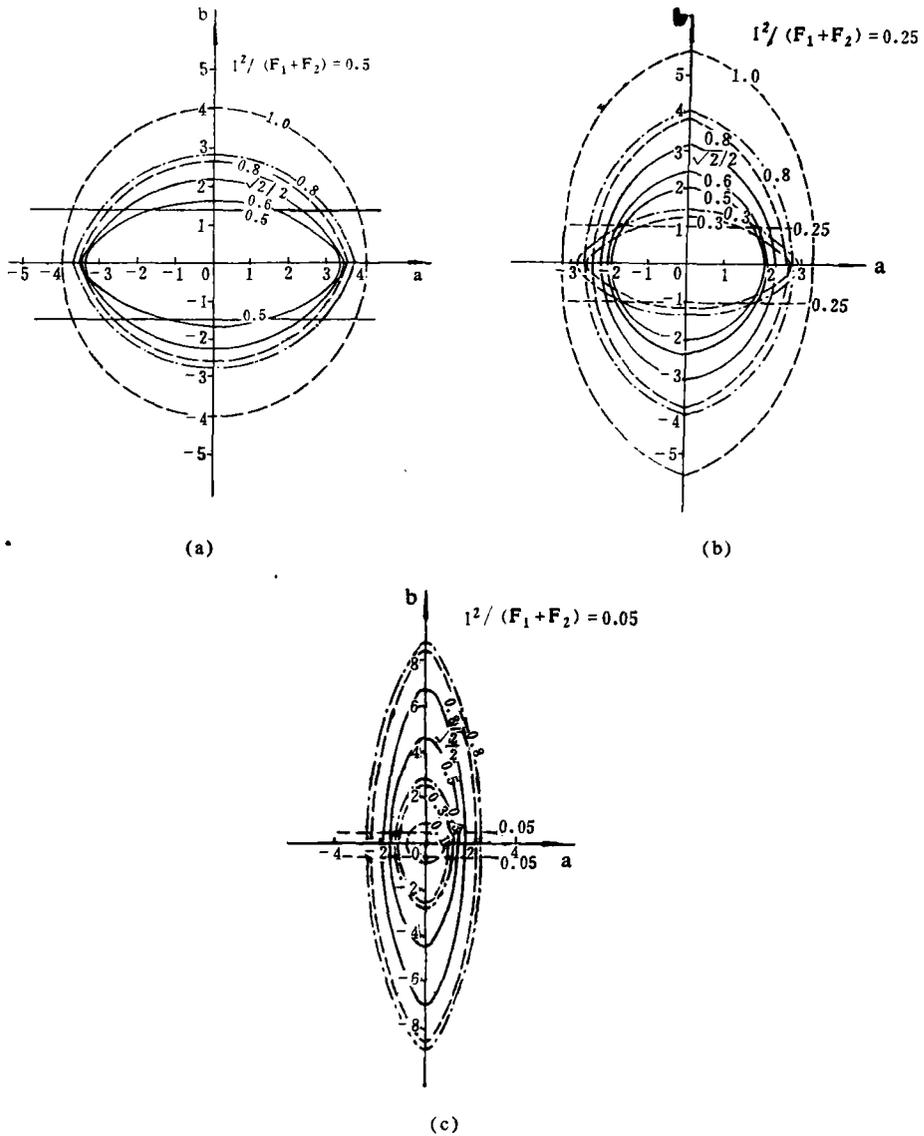


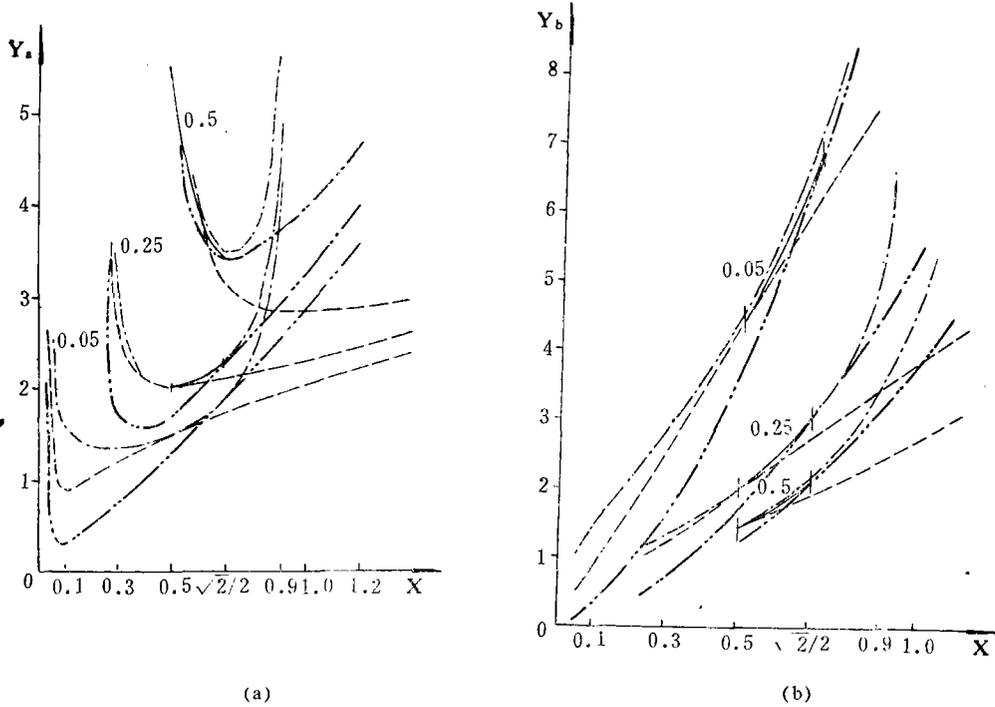
图 1 λ 判据和线性判据(19)式的比较

(点划线为线性情况, 实、虚线为 λ 判据, 曲线上标出的数字为 $\frac{K^2}{F_1 + F_2}$ 的值; 横坐标 $a = \left[\frac{U_e^2 F_1 F_2}{\gamma^2 (F_1 + F_2)} \right]^{1/4}$,

纵坐标 $b = \left[\frac{V_e^2 F_1 F_2}{\gamma^2 (F_1 + F_2)} \right]^{1/4}$)

$l^2 < K^2 < \sqrt[3]{F_1^2 F_2} + \sqrt[3]{F_1 F_2^2}$, 而非线性判据都只有长波截断而无短波截断, 其不稳定的波数范围为 $K^2 > l^2$, 比线性情况宽, 即非线性判据可以考虑波长较短的不稳定波。因此, 从不稳定的范围来看, 非线性判据也优于线性判据。

由图 2 还可看到, λ 判据的临界热成风 U_e, V_e 值均大于或等于能量判据和位涡拟能判据的 U_e, V_e 值, 即用能量或位涡拟能判据确定稳定的扰动用 λ 判据确定也一定稳定, 反之不能成立, 用 λ 判据确定稳定的扰动用能量或位涡拟能判据不一定能确定也是稳定



(a)

(b)

图 2 四种判据中椭圆长、短轴的比较

(单点划线为线性情况,虚线为能量判据,粗双点划线为位涡拟能判据,实线与其左边的虚线和右

边的双点划线组成 λ 判据,图中数字为 $\frac{l^2}{F_1+F_2}$ 的值; $X = \frac{K^2}{F_1+F_2}$, $Y_a = \frac{a_n^2 \sqrt{F_1 F_2}}{\nu \sqrt{F_1+F_2}}$, $Y_b = \frac{b_n^2 \sqrt{F_1 F_2}}{\nu \sqrt{F_1+F_2}}$)

的。显然, λ 判据是最优判据。

因为椭圆方程(33)、(44)、(59)三式中长短轴 a_n^2 , b_n^2 越小,则对应的 U_c, V_c 越小,从而最容易出现不稳定。因此, a_n^2 , b_n^2 的极小值对应的 K 的波长为最不稳定波长。例如:

$$\frac{l^2}{F_1+F_2} = 0.5, 0.25, 0.05; \frac{K_a^2}{F_1+F_2} = 1.0, \frac{3}{8}, \frac{3}{40}; \text{均有 } \frac{k}{F_1+F_2} = 0, k_a, k_b \text{ 分别}$$

为 a_n^2 和 b_n^2 对应的最不稳定波数。按前面取值, $F_1=6.0, F_2=4.0$, 和 $k = \frac{2\pi L_0}{L}, l =$

$$\frac{2\pi L_0}{L_1}, L_0 \sim 10^8 m, \text{此例分别对应为 } L_l \sim 2.8 L_0, 4.0 L_0, 8.9 L_0; L_a \sim 3.0 L_0, 5.6 L_0,$$

$12.6 L_0; L_b \sim \infty$ 。显然,最不稳定波长 L_a, L_l 与观测事实较为一致,但 L_b 很长。特别 $l \rightarrow$

$0, \frac{K}{k} \rightarrow 1$, 有 $a_n^2 \rightarrow 0$, 对应 $k \rightarrow 0$; 此时 $b_n^2 > 0, (n=1, 2)$, 因此,最长波长的波也可能是

是最不稳定的。这种不稳定是一种非传统途径的非指数增长型的广义扰动能量增大,似乎与经典的 Charney 斜压不稳定有所不同, Charney 模是天气尺度,有些接近不稳定 Green 模的行星尺度。

四、结 语

本文应用 Serrin-Joseph 的广义能量法, 导得了含 Ekman 摩擦的非纬向基流的非线性斜压不稳定判据, 推广了 Henrotay 的结果。本文结果表明, 非线性判据优于线性判据, 而 λ 判据又是其中最优判据。本文与 Henrotay 有一重要不同之处, 即本文的 λ 判据的 U_c, V_c 与线性判据不相重合且比后者小, 而纬向基流的不判据与线性判据有一段重合, 因此, 非纬向基流比纬向基流更易发生不稳定。本文还得到, 除了通常的长波存在最不稳定波长, 行星波也有最不稳定波长, 由于行星波的不稳定对于遥相关有着重要意义^[8]。因此, 本文不稳定的机制值得进一步研究。

参 考 文 献

- [1] Pedlosky, J., *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer Verlag, 1979.
- [2] 李崇银, 非纬向基本气流的斜压不稳定, *气象学报*, 42, 2, 148-155, 1984.
- [3] Henrotay, P., Nonlinear baroclinic instability: an approach based on Serrin's energy method, *J. Atmos. Sci.*, 40, 762-768, 1983.
- [4] 陆维松, 摩擦耗散和非线性正压不稳定, *中国科学 (B 辑)*, 8, 888-896, 1989.
- [5] Serrin, J., On the stability of viscous fluid motions, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 3, 1-13, 1959.
- [6] Joseph, D. D., On the stability of the Boussinesq equations, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 20, 59-71, 1965.
- [7] Joseph, D. D., *Stability of Fluid Motions, I, II*, Springer Verlag, 1976.
- [8] Haarsma, R. J., and J. D. Opsteegh, Barotropic instability of planetary-scale flows, *J. Atmos. Sci.*, 45, 2789-2810, 1988.

NONLINEAR BAROTROPIC INSTABILITY OF NONZONAL FLOWS

Lu Weisong Yang Song

(Nanjing Institute of Meteorology)

Abstract

From a two-level nonlinear baroclinic model including frictional dissipation, using Serrin-Joseph's energy method, by means of the variational principle, the nonlinear baroclinic stability criterions of nonzonal flows with the total energy, and total enstrophy, the linear combination of above two quantities respectively are found, and these criterions are compared with the linear stability criterion.