

球面定常行星波射线的变化与波列的分支*

侯志明

(南京大学大气科学系)

提 要

为了解释大气低频波列的结构特征, 本文把慢变介质中波传播的理论应用于行星波。采用射线追踪方法, 借助于几何直观, 在波射线与纬线平行的纬度附近, 讨论了波数 k 的分布对波射线变化与波列分支的作用。并讨论了沿波射线路径波幅的变化。提出, 在波数 k 为极值的纬度附近, 定常行星波列存在着明显的分支现象。在传播期间, 波幅在分支纬度附近为极大值。这些结论与双测和模拟的结果是相当一致的。此外, 本文还讨论了“大圆路径理论”的局限性。

一、引 言

近年来, 大气环流的遥相关问题的研究已取得了很大进展。无论是从双测分析得到的遥相关还是由模式得到的遥响应, 它们在结构方面都有着共同的特征, 那就是在球面上表现为相似的低频波列。Hoskins 和 Karoly^[1]用球面二维定常行星波的能量频散来解释遥相关和遥响应, 在常值角速度基流条件下, 首先提出了大圆路径的理论。这种大圆理论受到了人们的普遍重视。

可是, 无论是从双测分析得到的遥相关(如 Wallace 和 Gutzler^[2]的工作)或是由模式得到的遥响应(如 Hoskins 和 Karoly^[1]的工作)常可看到, 波列同时有向极地和东南方向传播的现象。如在文献^[1]中, Hoskins 和 Karoly 用五层模式模拟了地形、热源或涡源的强迫响应。从他们模拟的结果中可以看到, 300 hPa 上的强迫响应与用正压理论计算的射线路径分布是相当一致的。当强迫源位于(0°E, 15°N)时, 1 至 3 波向极地方向传, 而 4 至 7 波向东和赤道方向传。与之相应的涡度扰动非常清楚地表明, 在强迫源的下游行星尺度扰动有明显的分支现象。除此之外, 在传播期间波幅的局地分布也并非象 Hoskins 和 Karoly 所解释的那样只是简单地向极地方向增大。总之, 在一定的条件下, 波列可以产生分支, 向不同方向传, 而引起不同方向上的环流变化和气候异常。关于这种分支现象的探讨, 显然对于深入理解大气中的遥相关问题和 Hoskins 和 Karoly 的大圆路径理论都是有意义的。

本文应用射线追踪方法在定常行星波射线与纬线平行的纬度附近, 讨论了波射线的变化与波列的分支, 以及波幅的分布特征。并将所得结果用 Hoskins 和 Karoly^[1]数值模拟的结果进行论证, 同时还讨论了大圆理论的局限性。

* 本文于 1988 年 12 月 5 日收到, 1989 年 10 月 30 日收到修改稿。

二、定常行星波射线方程及大圆理论的定性图象

按 Hoskins 和 Karoly^[1]的讨论, 球面上线性无辐散正压涡度方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) + \tilde{\beta} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

式中 $x = a\lambda, y = a \ln[(1 + \sin\varphi)/\cos\varphi]$ 为 Mercator 投影坐标, a 是地球半径, λ, φ 分别是经度和纬度, ψ 为水平扰动流函数。式中

$$\tilde{u} = \frac{\bar{u}}{\cos\varphi} \quad (2)$$

为基本纬向气流速度, 而

$$\tilde{\beta} = \frac{2\Omega \cos^2\varphi}{a} - \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{\cos^2\varphi} \frac{d}{dy} (\cos^2\varphi \bar{u}) \right] \quad (3)$$

为绝对涡度的经向梯度。

对于方程(1)的平面波解 $e^{i(kx+ly-\omega t)}$, 频散关系为

$$\omega = \tilde{u}k - \frac{\tilde{\beta}k}{k^2 + l^2} \quad (4)$$

波的群速度为

$$\mathbf{c}_g = (c_{gx}, c_{gy}) \quad (5)$$

式中

$$c_{gx} = \frac{\omega}{k} + \frac{2\tilde{\beta}k^2}{(k^2 + l^2)^2} \quad (6)$$

$$c_{gy} = \frac{2\tilde{\beta}kl}{(k^2 + l^2)^2} \quad (7)$$

下面讨论定常波($\omega=0$)。对于定常波, 全波数 $k_s^2 = k^2 + l^2$ 为

$$k_s^2 = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{u}} \quad (8)$$

波射线方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_{gy}}{c_{gx}} = \frac{l}{k} \quad (9)$$

上式又可写成

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{k_s}{k}\right)^2 - 1 \quad (10)$$

可见, 对于每个 $k > k_s$ 的波不存在传播解, 而对于 $k < k_s$ 的波从源地可以追踪到两条波射线, 即

$$\frac{dy}{dx} = \pm \left[\left(\frac{k_s}{k}\right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

一条向东北传, 一条向东南传。为了确定起见, 本文讨论向东北传的波。

对于行星波传播问题, 可将大气介质特性 \tilde{u} 和 $\tilde{\beta}$ 看成是纬度慢变函数, 这种变化对于波的经向频散(尤其是对某一 k 值的波能以自身增强的方式被反射)有重要的作用。由于介质特性量 \tilde{u} 和 $\tilde{\beta}$ 只依赖于纬度, 所以波的特性(如经向波数 l)在 WKBJ 近似下被假

定为仅仅依赖于 y 。这种对 y 的依赖性只是通过 \tilde{u} 和 $\tilde{\beta}$ 随纬度的变化才可能引起。因而,对某一条射线而言, k 是常数,而 l 是可变的^[3]。

大气中 \tilde{u} 和 $\tilde{\beta}$ 随纬度变化的特点决定了 k 。通常是随纬度减小的^[1]。这样对某一 k 值的波而言,其射线会在某一纬度 $y = y_c$ 与纬线平行。在此纬度附近,射线很可能变换方向。因此,我们讨论此纬度附近射线的变化情况。

在纬度 $y = y_c$ 附近,由(10)式,某一 k 值的波射线方程近似为

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \lambda_1(y - y_c) \quad (12)$$

其中

$$\lambda_1 = \left[\frac{d}{dy} \left(\frac{k_s}{k} \right)^2 \right]_{y=y_c} = \left[\frac{2}{k} \frac{dk_s}{dy} \right]_{y=y_c} \quad (13)$$

积分(12)式可得射线路径

$$y = y_c + \frac{\lambda_1}{4} (x - x_0)^2 \quad (14)$$

其中 $x_0 = \text{常数}$ 。(14)式是 $y = y_c$ 纬度附近某一 k 值波射线路径,其路径为抛物线,如图 1 所示,波在向极地和东传一段距离后,在 (x_0, y_c) 转向赤道方向。这种波在 $y = y_c$ 纬度被反射。这与 Hoskins 的大圆路径理论所描述的情况是一致的。但需提出,严格地说 $l = 0$ 时慢变近似方程(12)不适用,但是 Gill^[4]认为这种方法可以给出良好的定性图象。

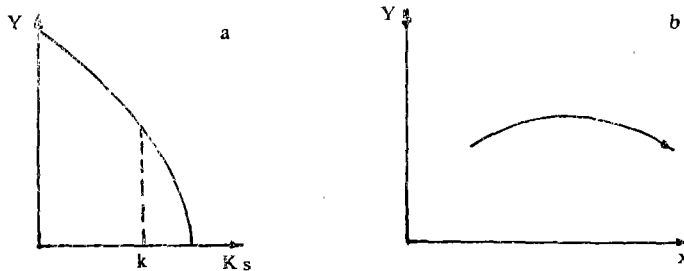


图 1 (a) k_s 的分布 (b) 射线示意图

三、波列的分支

如果 k_s 的经向分布在 $y = y_c$ 纬度附近存在极值,则(12)中

$$\lambda_1 = 0 \quad (15)$$

于是,波射线方程(10)化为

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{\lambda_2}{2}} (y - y_c) \quad (16)$$

其中

$$\lambda_2 = \left[\frac{d^2}{dy^2} \left(\frac{k_s}{k} \right)^2 \right]_{y=y_c} = \left[\frac{2}{k} \frac{d^2 k_s}{dy^2} \right]_{y=y_c} \quad (17)$$

考虑到 $k_s^2 = k^2 + l^2$,则

$$\lambda_2 = \left[\frac{2}{k^2} \left(\frac{dl}{dy} \right)^2 \right]_{y=y_c} > 0 \quad (18)$$

可见, (16)式实际上是一条与 k_s 的极小值相对应的波射线方程。

由(16)–(18)式可知, 与 k_s 的极大值相对应的某个 $k = k_1$ 的波射线在 $y = y_c$ 的纬度是不存在的。这表明, 对于 k_1 的波被“经向截陷”, 它传不到 y_c 纬度。由图 2 可见, 在 k_s 极大值出现的纬度附近 k_1 波被截陷, 但它可以如图 2 a 所示穿过极小值区, 继续向东南方向传。这种波射线有转向点, 其路径如同上节所述的那样, 在其转向点附近呈抛物型。

而与 k_s 的极小值相对应的某个 $k = k_2$ 的波射线是存在的, 其射线方程为(16)式。积分(16)式可得射线路径

$$y = y_c + e \sqrt{\frac{\lambda_2}{2}} (x - x_0) \quad (19)$$

这是一条指数型路径。当 $x = x_0$ 时, $y = y_c + 1$, 这表明与 k_s 的极小值对应的 k_2 波射线并非通过 (x_0, y_c) 点, 而是在经向上从 y_c 跃迁到 $y_c + 1$ 的纬度, 呈指数型(如图 2 b)。

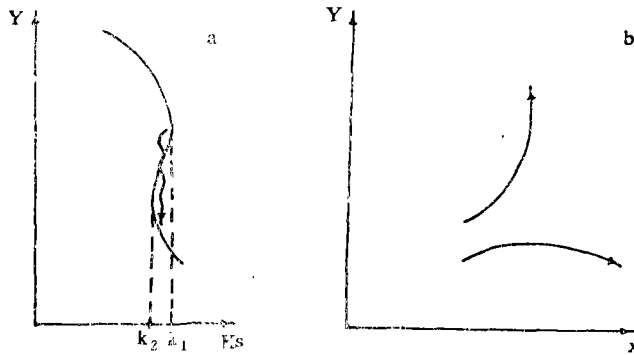


图 2 (a) k_s 的分布, (b) 射线示意图

Held 曾指出: “经向截陷作用有明显的可能性, 并可能对大气中的强迫波变化具有重要意义。”^[5]由以上分析可知, 当 k_s 的分布出现极值时, 其极大值附近存在波的经向截陷。这种经向截陷的作用是把较高波数(k_1)的波射线和较低波数(k_2)的波射线明显地经向分开, 即高波数射线呈抛物型转向东南, 而低波数射线呈指数型继续向北。我们把这种现象称为射线的“经向分野”, 而这种经向分野表现在强迫扰动方面就是波列的分支。

如果 k_s 的分布有多个极值存在, 同上可做类似地分析。在这种情况下, 波列可以在多分支现象。

四、沿射线路径波幅的变化

为了讨论波幅的变化, 引入波作用量守恒

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{c}_g \cdot \nabla \right) A = \quad (20)$$

这里, 波作用量^[6]为

$$A = \frac{k_s^2}{2 \hat{u} k} \hat{\psi}^2 \quad (21)$$

其中 $\hat{\psi}$ 为波幅。

由于波传播介质只与 y 有关, 按 Lighthill 的讨论^[7], $c_{gy} \cdot A$ 沿射线应为常数。将 c_{gy}

乘(21)式可得

$$\hat{\psi}^2 \cdot l = \text{常数} \quad (\text{沿射线}) \quad (22)$$

则有

$$\hat{\psi}^2 \propto |l|^{-1} \quad (23)$$

即沿射线路径波幅与经向波数成反比。

由于沿射线经向波数是变化的,因此波幅的局地分布也相应变化。当波向极地传

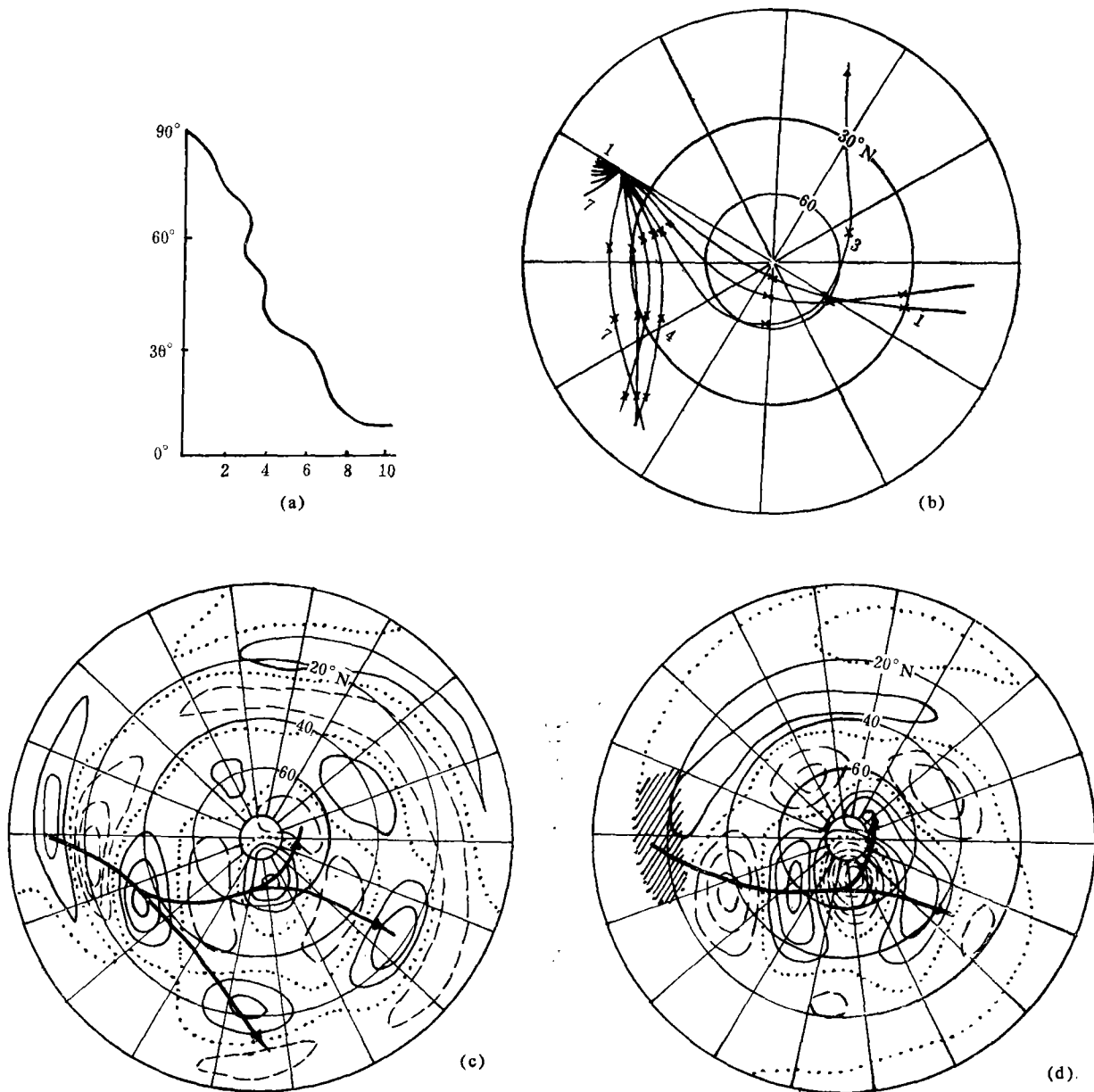


图 3 对于 300 hPa 北半球冬季气流(a) ak 的分布, (b) 射线及每隔 180° 相位, (c) 涡度扰动, (d) 高度场扰动; 扰源均位于 $(15^\circ\text{N}, 0^\circ\text{E})$ (取自文献[1])

并射线变得纬向时, l 减小, 因此波幅是向极地增大的, 这正如大圆理论所描述的那样。在分支纬度附近波幅取极大值。过分支纬度后, 波射线无论是向南转或是继续向极地, 均因 $|l|$ 是增大的, 波幅都将减小, 并非象 Hoskins 所解释的那样只是简单地向北增大。

五、数值模拟的例证与大圆理论的局限性

Hoskins 和 Karoly 的工作在第一节中已提及, 下面利用他们的模拟结果对本文的分析结果进行论证。图 3 a 是 300 hPa 北半球冬季气流的波数 ak_s 的分布, 由图可见在 40°N — 50°N , 60°N — 70°N 分别存在极值。与此相对应有波的经向截陷, 这些经向截陷所在的纬度同图 3 b 所示的射线经向分野和图 3 c 所示的波列分支出现的纬度是相当一致的。也就是说, 在 k_s 取极值的纬度附近, 波列存在分支。对于图 3 d 所示的高度场扰动在 60°N — 70°N 也有明显的分支。只是其基本型式对应于低波数路径。由图 3 c, d 还可以看出在分支纬度附近, 波幅为极大值, 而过分支纬度波列无论是向哪个方向走, 波幅都是减小的。这种波幅的分布特征与上一节的分析结果是相当一致的。

Hoskins 和 Karoly 模拟的结果是半球范围波列传播现象。而本文只是把注意力集中到射线有可能改变方向的纬度附近, 至于射线上其它位置则与其方向改变关系不大。如果我们在分支纬度附近对射线路径变化与波列分支的基本图象有了认识, 那末对半球范围的波列传播情况就有了大致的了解。

Hoskins 和 Karoly 的大圆理论是在常位角速度基流条件下得到的。他们把 \tilde{u} 取成

$$\tilde{u} = a\tilde{\omega}, \quad \tilde{\beta} = \frac{2\cos^2\varphi}{a}(\Omega + \tilde{\omega}) \quad (24)$$

其中 $\tilde{\omega}$ 为常数。则有

$$k_s = (\epsilon a)^{-1} \cos\varphi \quad (25)$$

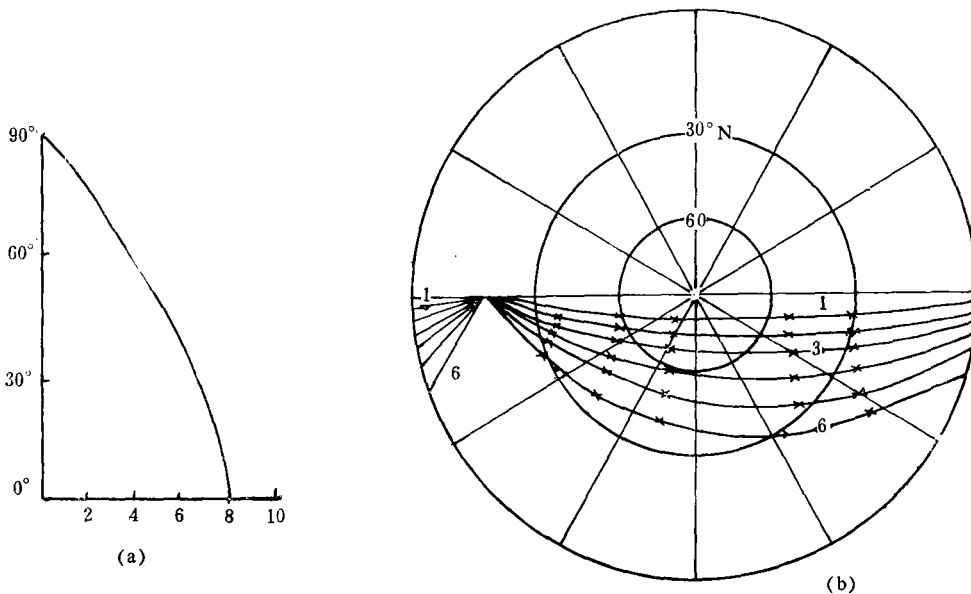


图 4 对于超旋转流, (a) ak_s 的分布, (b) 射线及每隔 180° 位相, 扰源位于 $(15^\circ\text{N}, 0^\circ\text{E})$ (取自文献[1])

其中 $\epsilon^2 = \tilde{\omega} / [2(\Omega + \tilde{\omega})]$, 由此在半球范围内

$$a \frac{\partial k_s}{\partial \varphi} = -\epsilon^{-1} \sin \varphi < 0 \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \right) \quad (26)$$

这表明大圆理论只是在 k_s 随纬度单调减小的条件下得到的。图 4a 是在这种常值角速度基流(超旋转流)下的 ak_s 分布。对于这种 k_s 单调减小的情况, 波射线图 4b 没有射线的经向分叉, 显然也不存在波列的分支。由此可见, 大圆理论忽略了 $\tilde{\omega}$ 随纬度变化可导致 k_s 出现极值的可能性。

六、结 论

本文得到如下结论:

1. 行星波列是否出现分支取决于 k_s 的分布是否出现极值, 而 k_s 的极值所在纬度附近, 波列存在分支。在分支纬度附近, 高波数射线呈抛物型转向东南而低波数射线呈指数型继续向北。

2. 在传播期间, 波幅在分支纬度为极大值。在向分支纬度传时波幅增大, 背分支纬度传则波幅减小。

3. 大圆理论只是在 k_s 随纬度单调减小的条件下得到的, 因此它忽略了 $\tilde{\omega}$ 的变化可导致 k_s 出现极值的可能性。

致谢: 本文承伍荣生教授提出宝贵意见, 并给作者以鼓励, 特此致谢。

参 考 文 献

- [1] Hoskins, B. J., and D. J. Karoly, The steady linear response of a spherical atmosphere to thermal and orographic forcing, *J. Atmos. Sci.*, **38**, 1179-1196, 1981.
- [2] Wallace, J. M., and D. S. Gutzler, Teleconnections in the geopotential height field during Northern Hemisphere winter, *Mon. Wea. Rev.*, **109**, 784-812, 1981.
- [3] Whitham, G. B., A note on group velocity, *J. Fluid Mech.*, **9**, 347-352, 1974.
- [4] Gill, A. E., *Atmosphere-Ocean Dynamics*, 622, Academic Press, 1982.
- [5] Held, I. M., Stationary and quasi-stationary eddies in the extratropical troposphere: theory. Larger-Scale Dynamical Processes in the Atmosphere, B. J. Hoskins and R. P. Pearce, Eds., Academic Press, 1983.
- [6] 侯志明, 大气低频振荡水平波状结构的解释, *南京大学学报*, **23**, 205-214, 1987.
- [7] Lighthill, J., *Wave in Fluids*, 504, Cambridge University Press, 1978.

THE VARIATIONS OF THE STEADY PLANETARY WAVE RAYS AND THE BIFURCATIONS OF THE WAVETRAINS

Hou Zhiming

(Department of Atmospheric Sciences, Nanjing University)

Abstract

In order to explain the structures of low-frequency atmospheric wavetrains the theory for propagating in a slowly varying medium is applied to the planetary waves. Using the ray tracing techniques, this paper discusses the effect of the variations of the wavenumber K_s on the variations of ray and the bifurcations of wavetrains nearby latitudes where the ray parallels to the latitude circle. The amplitude variations along the ray path are also discussed. It is pointed out that the phenomena of the wavetrain bifurcations obviously exist nearby the latitudes where K_s has the extremum, and wave amplitude is the maxima near the latitude during propagating. They agree with observational and numerical model results. The limitation of the great circle theory is also discussed.