第46卷 第4期 气 象 学 报 Vol. 46, No. 4
1988 年 11 月 ACTA METEOROLOGICA SINICA Nov., 1988

正压边界层中的风压场相互调整*

徐银梓 伍荣生

(南京大学大气科学系)

提 要

本文考虑正压边界层顶的垂直质量输送，将边界层与自由大气联系起来，研究这两层之间的风压场的相互作用所得到定常状态下的风压场，并算得了边界层顶的垂直速度。这些结果与经典Ekman边界层是有明显区别的。

一、引 言

由经典 Ekman 边界层理论知，正压边界层中水平风速的垂直分布廓线呈 Ekman 螺线，且边界层顶的垂直速度与自由大气底部(即边界层顶)的地转涡度成正比[1,2]。这些结果均未涉及边界层与自由大气之间的相互作用。现在我们就来讨论这种作用。即考虑到边界层中，由于有质量的水平辐合辐散，引起边界层顶有质量的垂直输送，至使自由大气中气压场发生改变，这又会反馈地影响边界层的辐合辐散。如此循环，最终边界层中的风压场平衡态是什么？边界层顶的垂直速度又如何？这些就是我们要探索的问题。

二、基 本 方 程

在正压大气中，线性化的水平运动方程和连续性方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial \Pi}{\partial x}+fv+k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial \Pi}{\partial y}-fu+k\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{3}$$

式中 f 为柯氏参数，取作常数，Π 为扰动位势，k 为湍流涡粘系数，也取常数。若取 $k=0$，则上述方程组便是奥布霍夫分析正压地转适应过程所使用过的。

取尺度关系如下：

$$(u,v)=V(u',v'),\quad (x,y)=L(x',y'),\quad z=Hz',$$
$$t=f^{-1}t',\Pi=fVL\Pi',\quad w=\frac{VH}{L}R_0w', \tag{4}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{V}{L}R_0\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)$$

式中R_0为 Rossby 数。于是，(1)—(3)可化为下列无因次方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial \Pi}{\partial x}+v+E\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{5}$$

* 本文1985年7月15日收到，1987年4月7日收到修改稿。

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial \Pi}{\partial y}-u+E\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{7}$$

式中 E 为 Ekman 数：$E=\frac{k}{fH^2}$。

在自由大气中，由于 $E\approx 0$，故有

$$\frac{\partial u^*}{\partial t}=-\frac{\partial \Pi^*}{\partial x}+v^* \tag{8}$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t}=-\frac{\partial \Pi^*}{\partial y}-u^* \tag{9}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x}+\frac{\partial v^*}{\partial y}+\frac{\partial w^*}{\partial z}=0 \tag{10}$$

式中"*"号表示自由大气中的量。在边界层中，湍流摩擦作用是不可略的，为此，作扩张变换：

$$\eta=E^{-1/2}z \tag{11}$$

则得

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}=-\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial x}+\tilde{v}+\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} \tag{12}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}=-\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial y}-\tilde{u}+\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \eta^2} \tag{13}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}+\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \eta}=0 \tag{14}$$

式中"～"号表示边界层中的量，且已设

$$\tilde{w}=wE^{-1/2} \tag{15}$$

由(8)、(9)、(10)式得到自由大气中的涡度方程为：

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t}=\frac{\partial w^*}{\partial z} \tag{16}$$

将(16)式关于 z 从边界层顶积分到大气顶，且设大气顶的垂直速度为零，得到：

$$\frac{\partial \bar{\zeta}^*}{\partial t}=-w_T \tag{17}$$

式中 $\bar{\zeta}^*$ 为自由大气中平均位面上的涡度，w_T 为边界层顶的垂直速度。

再将(14)式关于 η 从零积分到边界层顶，且设地面的垂直速度为零，则有：

$$\tilde{w}_T=-\int_0^\infty\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}\right)d\eta \tag{18}$$

设平均位面上，准地转关系成立：

$$\bar{\zeta}^*\approx\bar{\zeta}_g^*=\nabla^2\bar{\Pi}^* \tag{19}$$

又设边界层和自由大气均为正压的，即

$$\bar{\Pi}^*=\tilde{\Pi}=\Pi \tag{20}$$

由(17)—(20)式，得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\Pi=\int_0^\infty\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}\right)d\eta\cdot E^{\frac{1}{2}} \tag{21}$$

由(21)式可看到，边界层内存在着一个与通常情况相反的现象，即当边界层内有净的

质量辐合时，地转涡度反而减小；反之，当有辐散时，地转涡度反而增加。这可作如下的解释：当边界层内有净的水平辐合时，就会造成高层的补偿辐散，从而引起高层地转涡度减小，因此也使得边界层内地转涡度减小；反之亦然。

(12)、(13)和(21)式构成了边界层内风压场变化的闭合方程组。在此方程组中，已经考虑到了 Ekman 冲击(pumping)对自由大气的作用所引起的高度场的变化，而此高度场的变化反馈地影响了边界层内风场的变化，因而又影响到 Ekman 冲击作用。

引入流函数 ψ 和速度势 φ，(12)、(13)和(21)式可改写为：

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\varphi-\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}=0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\psi+\Pi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}=0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial t}-\int_0^\infty\varphi d\eta\cdot E^{\frac{1}{2}}=0 \tag{24}$$

这就是我们的基本方程组。

三、边界层中的平衡态

将 ψ,φ,Π 分解成不随时间变化的渐近定常部分(即平衡态，用下标 s 表示)和非定常部分。这样划分的好处是不必求解波动方程，用简单方法便可得到各个变量平衡态间的关系[3]。先把分解式代入(22)—(24)式，然后求各变量的平衡态，注意到非定常部分是没有平衡态的，于是有：

$$\varphi_s-\frac{\partial^2\psi_s}{\partial\eta^2}=0 \tag{25}$$

$$-\psi_s+\Pi_s-\frac{\partial^2\varphi_s}{\partial\eta^2}=0 \tag{26}$$

$$\int_0^\infty\varphi_s d\eta=0 \tag{27}$$

采用定常的下边界条件和有界的上边界条件：

$$\begin{cases}\eta=0,\ \varphi=\varphi_0(x,y),\ \psi=\psi_0(x,y)\\ \eta\to\infty,\psi,\varphi,\Pi\text{有界}\end{cases} \tag{28}$$

由(25)—(28)式解得：

$$\varphi_s=\sqrt{2}\,\varphi_0e^{-\frac{\eta}{\sqrt{2}}}\cos\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}+\frac{\Pi}{4}\right) \tag{29}$$

$$\psi_s=\psi_0+\varphi_0-\sqrt{2}\,\varphi_0e^{-\frac{\eta}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}+\frac{\Pi}{4}\right) \tag{30}$$

$$\Pi_s=\psi_0+\varphi_0 \tag{31}$$

由 $\varphi_s|_{\eta\to\infty}=0$，和 $\psi_s|_{\eta\to\infty}=\Pi_s$ 可知，此解满足边界层顶为无辐散和地转关系的要求。(29)—(31)式即为所求的平衡态。

四、非平衡态的变化

设初始条件 $t=0$ 时：

$$
\begin{cases}
\varphi=\varphi_0+\varphi_1(1-e^{-\alpha\eta}) \\
\psi=\psi_0+\psi_1(1-e^{-\alpha\eta}) \\
\Pi=\Pi_0(x,y)
\end{cases}
\tag{32}
$$

式中 φ_0,ψ_0,Π_0为初始时刻地面的速度势,流函数和扰动位势(与高度无关)。φ_1,ψ_1为初始时刻边界层顶的与地面的速度势之差和流函数之差,α 为参数。

对定解问题(22)—(24)、(28)和(32)式用拉普拉斯变换法解之。首先,施行拉普拉斯变换得到

$$P\bar{\psi}-[\psi_0+\psi_1(1-e^{-\alpha\eta})]+\bar{\varphi}-\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial\eta^2}=0 \tag{33}$$

$$P\bar{\varphi}-[\varphi_0+\varphi_1(1-e^{-\alpha\eta})]-\bar{\psi}+\bar{\Pi}-\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial\eta^2}=0 \tag{34}$$

$$P\bar{\Pi}-\Pi_0-\int_0^{\infty}E^{\frac{1}{2}}\bar{\varphi}d\eta=0 \tag{35}$$

$$
\begin{cases}
\eta=0,\bar{\varphi}=\dfrac{\varphi_0}{P},\ \bar{\psi}=\dfrac{\psi_0}{P} \\
\eta\to\infty,\bar{\varphi},\bar{\psi},\bar{\Pi}\text{有界}
\end{cases}
\tag{36}
$$

上述各式中带横号的量为像函数。由(33)、(34)和(36)式解得:

$$\bar{\varphi}=c_1e^{-\sqrt{P+i}\eta}+c_2e^{-\sqrt{P-i}\eta}-\frac{\varphi_1(P-\alpha^2)+\psi_1}{(P-\alpha^2)^2+1}e^{-\alpha\eta}+\frac{P(\varphi_0+\varphi_1)+\psi_0+\psi_1}{P^2+1}-\frac{P\bar{\Pi}}{P^2+1} \tag{37}$$

$$\bar{\psi}=-c_1ie^{-\sqrt{P+i}\eta}+c_2ie^{-\sqrt{P-i}\eta}+\frac{\varphi_1-\psi_1(P-\alpha^2)}{(P-\alpha^2)^2+1}e^{-\alpha\eta}+\frac{P(\psi_0+\psi_1)-(\varphi_0+\varphi_1)}{P^2+1}+\frac{\bar{\Pi}}{P^2+1} \tag{38}$$

式中

$$c_1=\frac{1}{2}\left[\frac{\varphi_0+i\psi_0}{P}+\frac{\varphi_1+i\psi_1}{P-\alpha^2+i}-\frac{\varphi_0+\varphi_1+i(\psi_0+\psi_1)}{P+i}+\frac{\bar{\Pi}}{P+i}\right] \tag{39}$$

$$c_2=\frac{1}{2}\left[\frac{\varphi_0-i\psi_0}{P}+\frac{\varphi_1-i\psi_1}{P-\alpha^2-i}-\frac{\varphi_0+\varphi_1-i(\psi_0+\psi_1)}{P-i}+\frac{\bar{\Pi}}{P-i}\right] \tag{40}$$

将(37)式代入(35)式,因为边界层很薄,可略去与 η 无关的项的积分。另外,求 t 充分大时的解时,为了反演的方便,可采用下述近似:

$$(P\pm i)^{-1/2}\approx(\pm i)^{-\frac{1}{2}},\ (P\pm i)^{-\frac{3}{2}}\approx(\pm i)^{-\frac{3}{2}} \tag{41}$$

这是因为Π在 $t\to\infty$时的极限值等于 $P\bar{\Pi}(P)$在 $P\to 0$ 时的极限值,即熟知的定理:$\Pi_\infty=\lim\limits_{P\to 0}P\bar{\Pi}$。于是得到

$$\bar{\Pi}\approx\frac{\Pi_1}{P+\sqrt{\dfrac{E}{2}}}+\frac{\varphi_0+\psi_0}{P} \tag{42}$$

式中

$$\Pi_1=\Pi_0-\sqrt{E}\left[\frac{(\alpha^2+1)\phi_1+(\alpha^2-1)\psi_1}{\sqrt{2}(\alpha^4+1)}+\frac{\phi_0+\phi_1-(\psi_0+\psi_1)-\sqrt{\dfrac{2}{E}}(\varphi_0+\psi_0)}{\sqrt{2}}+\frac{\phi_1\alpha^2-\psi_1}{\alpha(\alpha^4+1)}\right] \tag{43}$$

将(42)式代入(37)、(38)式,并利用一系列反演公式[1],得到所求的 t 充分大时的非平衡

态的解为：

$$\Pi=\Pi_1 e^{-\sqrt{\frac{E}{2}}t}+\varphi_0+\psi_0 \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
\phi=&\frac{1}{2}\Bigg\{\frac{\varphi_0+i\psi_0}{2}\left[e^{-\sqrt{i}\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}-\sqrt{it}\right)+e^{\sqrt{i}\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}+\sqrt{it}\right)\right]\\
&+\frac{\phi_1+i\psi_1}{2}e^{(a^2-i)t}\left[e^{-a\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}-a\sqrt{t}\right)+e^{a\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)\right]\\
&-[\varphi_0+\varphi_1+i(\psi_0+\psi_1)]e^{-it}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}\right)+\Pi_1\left[\frac{e^{-\sqrt{\frac{E}{2}}t}}{2\left(i-\sqrt{\frac{E}{2}}\right)}\left(e^{\sqrt{i-\sqrt{\frac{E}{2}}}\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}\right.\right.\right.\\
&\left.+\sqrt{\left(i-\sqrt{\frac{E}{2}}\right)t}\right)+e^{-\sqrt{i-\sqrt{\frac{E}{2}}}\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}-\sqrt{\left(i-\sqrt{\frac{E}{2}}\right)t}\right)-\frac{e^{-it}}{i-\sqrt{\frac{E}{2}}}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}\right)\Bigg]\\
&+(\phi_0+\psi_0)\left[\frac{1}{2i}\left(e^{\sqrt{i}\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}+\sqrt{it}\right)+e^{-\sqrt{i}\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}-\sqrt{it}\right)\right]\right.\\
&\left.+ie^{-it}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}\right)\right]\Bigg\}+\frac{1}{2}\Bigg\{\frac{\phi_0-i\psi_0}{2}\left[e^{-\sqrt{-i}\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}-\sqrt{-it}\right)\right.\\
&\left.+e^{\sqrt{-i}\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}+\sqrt{-it}\right)\right]+\frac{\varphi_1-i\psi_1}{2}e^{(a^2+i)t}\left[e^{-a\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}-a\sqrt{t}\right)\right.\\
&\left.+e^{a\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)\right]-[\varphi_0+\varphi_1-i(\psi_0+\psi_1)]e^{it}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}\right)\\
&+\Pi_1\left[\frac{e^{-\sqrt{\frac{E}{2}}t}}{2\left(i-\sqrt{\frac{E}{2}}\right)}\left(e^{\sqrt{-i-\sqrt{\frac{E}{2}}}\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}+\sqrt{\left(-i-\sqrt{\frac{E}{2}}\right)t}\right)\right.\right.\\
&\left.\left.+e^{-\sqrt{-i-\sqrt{\frac{E}{2}}}\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}-\sqrt{\left(-i-\sqrt{\frac{E}{2}}\right)t}\right)\right)+\frac{e^{it}}{i+\sqrt{\frac{E}{2}}}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}\right)\right]\\
&+(\varphi_0+\psi_0)\left[\frac{i}{2}\left(e^{\sqrt{-i}\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}+\sqrt{-it}\right)+e^{-\sqrt{-i}\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}-\sqrt{-it}\right)\right)\right.\\
&\left.-ie^{it}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}\right)\right]\Bigg\}-\varphi_1\sqrt{\left(\frac{\psi_1}{\phi_1}\right)^2+1}\,e^{a^2t}\sin(t+\lambda_1)e^{-a\eta}\\
&-\Pi_1\left[-\frac{\sqrt{2E}}{E+2}e^{-\sqrt{\frac{E}{2}}t}+\sqrt{\frac{2}{E+2}}\sin(t+\lambda_2)\right]
\end{aligned} \tag{45}$$

式中

$$\lambda_1=\operatorname{arc\ tg}\frac{\varphi_1}{\psi_1},\ \lambda_2=\frac{\Pi}{2}-\operatorname{arc\ tg}\sqrt{\frac{2}{E}} \tag{46}$$

$$
\begin{aligned}
\psi=&-\frac{i}{2}\left\{\frac{\varphi_0+i\psi_0}{2}\left[e^{-\sqrt{i}\,\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}-\sqrt{it}\right)+e^{\sqrt{i}\,\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}+\sqrt{it}\right)\right]\right.\\
&+\frac{\varphi_1+i\psi_1}{2}e^{(a^2-i)t}\left[e^{-a\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}-a\sqrt{t}\right)+e^{a\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)\right]\\
&-[\varphi_0+\varphi_1+i(\psi_0+\psi_1)]e^{-it}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}\right)+\Pi_1\left[\frac{e^{-\sqrt{\frac{E}{2}}t}}{2\left(i-\sqrt{\frac{E}{2}}\right)}\left(e^{\sqrt{i-\sqrt{\frac{E}{2}}}\,\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}\right.\right.\right.\\
&\left.\left.+\sqrt{\left(i-\sqrt{\frac{E}{2}}\right)t}\right)+e^{-\sqrt{i-\sqrt{\frac{E}{2}}}\,\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}-\sqrt{\left(i-\sqrt{\frac{E}{2}}\right)t}\right)\right)-\left.\frac{1}{i-\sqrt{\frac{E}{2}}}e^{-it}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}\right)\right]\\
&+(\varphi_0+\psi_0)\left[\frac{1}{2i}\left(e^{\sqrt{i}\,\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}+\sqrt{it}\right)+e^{-\sqrt{i}\,\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}-\sqrt{it}\right)\right)\right.\\
&\left.\left.+ie^{-it}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}\right)\right]\right\}+\frac{i}{2}\left\{\frac{\varphi_0-i\psi_0}{2}\left[e^{-\sqrt{-i}\,\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}-\sqrt{-it}\right)\right.\right.\\
&\left.+e^{\sqrt{-i}\,\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}+\sqrt{-it}\right)\right]+\frac{\varphi_1-i\psi_1}{2}e^{(a^2+i)t}\left[e^{-a\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}-a\sqrt{t}\right)\right.\\
&\left.+e^{a\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)\right]-[\varphi_0+\varphi_1-i(\psi_0+\psi_1)]e^{it}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}\right)\\
&+\Pi_1\left[\frac{1}{2\left(i-\sqrt{\frac{E}{2}}\right)}e^{-\sqrt{\frac{E}{2}}t}\left(e^{\sqrt{-i-\sqrt{\frac{E}{2}}}\,\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}+\sqrt{\left(-i-\sqrt{\frac{E}{2}}\right)t}\right)\right.\right.\\
&\left.\left.+e^{-\sqrt{-i-\sqrt{\frac{E}{2}}}\,\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}-\sqrt{\left(-i-\sqrt{\frac{E}{2}}\right)t}\right)\right)+\frac{1}{i+\sqrt{\frac{E}{2}}}e^{it}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}\right)\right]\\
&+(\varphi_0+\psi_0)\left[\frac{i}{2}\left(e^{\sqrt{-i}\,\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}+\sqrt{-it}\right)+e^{-\sqrt{-i}\,\eta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}-\sqrt{-it}\right)\right)\right.\\
&\left.\left.-ie^{it}\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t}}\right)\right]\right\}+e^{a^2t}(\varphi_1\sin t-\psi_1\cos t)e^{-a\eta}+(\psi_0+\psi_1)\cos t-(\varphi_0+\varphi_1)\sin t\\
&+\Pi_1\left(-\frac{2}{E+2}\cos t+\frac{\sqrt{2E}}{E+2}\sin t+\frac{2}{E+2}e^{-\sqrt{\frac{E}{2}}t}\right)+(\varphi_0+\psi_0)(1-\cos t)
\end{aligned}
\tag{47}
$$

利用洛必答法则，易证(46)、(47)式中含 e^{a^2t} 为因子的三项之和，当 $t\to\infty$时，其极限均为零。故有

$$\varphi_s=\sqrt{2}\,\varphi_0 e^{-\frac{\eta}{\sqrt{2}}}\cos\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}+\frac{\Pi}{4}\right)\tag{48}$$

$$\psi_s=\varphi_0+\psi_0-\sqrt{2}\,\varphi_0 e^{-\frac{\eta}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}+\frac{\Pi}{4}\right)\tag{49}$$

$$\Pi_s=\varphi_0+\psi_0\tag{50}$$

(48)、(49)、(50)式与(29)、(30)、(31)式完全相同。这就有力地说明了在正压条件下，考

虑到边界层与自由大气的相互作用，则不管初始风场如何，最终总将调整为平衡态的解(48)—(50)式，此解仅由地面风场决定。

五、平衡态的解与无相互作用解的比较

不考虑上下两层的相互作用，在给定的边值(28)式和定常的气压场下可容易地求得定常的闭合方程组(25)和(26)式的解为：

$$\varphi_e=\left[\varphi_0\cos\frac{\eta}{\sqrt{2}}-(\Pi_e-\psi_0)\sin\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right]e^{-\frac{\eta}{\sqrt{2}}} \tag{51}$$

$$\psi_e=\Pi_e-\left[(\Pi_e-\psi_0)\cos\frac{\eta}{\sqrt{2}}+\varphi_0\sin\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right]e^{-\frac{\eta}{\sqrt{2}}} \tag{52}$$

为了叙述方便起见，我们称此解为无相互作用的解。这是因为气压场自始至终不进行调整的缘故。并用下标 e 表示。由(51)和(52)式可求得风速分布为：

$$u_e=-\frac{\partial\psi_e}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_e}{\partial x}=u_g+\left[(u_0-u_g)\cos\frac{\eta}{\sqrt{2}}+(v_0-v_g)\sin\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right]e^{-\frac{\eta}{\sqrt{2}}} \tag{53}$$

$$v_e=\frac{\partial\psi_e}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_e}{\partial y}=v_g+\left[(v_0-v_g)\cos\frac{\eta}{\sqrt{2}}-(u_0-u_g)\sin\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right]e^{-\frac{\eta}{\sqrt{2}}} \tag{54}$$

式中

$$u_g=-\frac{\partial\Pi_e}{\partial y},\ v_g=\frac{\partial\Pi_e}{\partial x},\ u_0=-\frac{\partial\psi_0}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial x},\ v_0=\frac{\partial\psi_0}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} \tag{55}$$

u_g,v_g 为地转风，u_0,v_0 为地面风。若地面无风，且设 $v_g=0$，则得有因次风速为：

$$u_e=u_g\left(1-e^{-\sqrt{\frac{f}{2k}}z}\right)\cos\sqrt{\frac{f}{2k}}z \tag{56}$$

$$v_e=u_g e^{-\sqrt{\frac{f}{2k}}z}\sin\sqrt{\frac{f}{2k}}z \tag{57}$$

此解就是著名的Ekman螺线解。 当考虑到上下两层的相互作用时情况就大不相同了。由(48)—(50)式，可得平衡态的水平风速为：

$$u_s=-\frac{\partial(\varphi_0+\psi_0)}{\partial y}+\sqrt{2}\left[\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\cos\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}+\frac{\Pi}{4}\right)+\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\sin\left(\frac{\eta}{\sqrt{4}}+\frac{\Pi}{4}\right)\right]e^{-\frac{\eta}{\sqrt{2}}} \tag{58}$$

$$v_s=\frac{\partial(\varphi_0+\psi_0)}{\partial x}+\sqrt{2}\left[\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\cos\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}+\frac{\Pi}{4}\right)-\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\sin\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}+\frac{\Pi}{4}\right)\right]e^{-\frac{\eta}{\sqrt{2}}} \tag{59}$$

由此可见，平衡态仅与地面风有关，而无相互作用解不仅与地面风有关，且与给定的气压场有关。仅当此气压场恰好等于Π_s(即 $\varphi_0+\psi_0$)时，两种解才一致。实际大气总是要相互作用的，这说明无相互作用解的气压场是不能任给的，它必须受到一定的约束。

下面我们来讨论相互作用和无相互作用两种情况下的垂直速度。

积分连续性方程可得边界层中垂直速度的垂直分布为：

$$w_e(\eta)=-\int_0^\eta \nabla^2\varphi_e d\eta=\left[D_0\cos\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)-(\zeta_g-\zeta_0)\sin\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}+\frac{\Pi}{4}\right)\right]e^{-\frac{\eta}{\sqrt{2}}}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta_g-D_0-\zeta_0) \tag{60}$$

$$w_s(\eta)=-\int_0^\eta \nabla^2\varphi_s d\eta=-\sqrt{2}D_0 e^{-\frac{\eta}{\sqrt{2}}}\sin\frac{\eta}{\sqrt{2}} \tag{61}$$

令 $\eta\to\infty$，便得边界层顶的垂直速度为：

$$w_{eT}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta_g-D_0-\zeta_0) \tag{62}$$

$$w_{ST}=0 \tag{63}$$

w_{eT}，w_{ST} 分别为无相互作用和相互作用情况下的边界层顶的垂直速度。由(62)式知，无相互作用的边界层顶垂直速度与地转涡度、地面涡度和地面散度三者的代数和成正比。当地面无风时，可得有因次的无相互作用的边界层顶垂直速度为：

$$w_{eT}=\zeta_g\sqrt{\frac{k}{2f}} \tag{64}$$

此式说明无相互作用的边界层顶垂直速度与地转涡度成正比，这最初是由 Charney 和 Eliassen[5]推得的。由(63)求知，当考虑到相互作用时，边界层顶垂直速度的平衡态为零。否则，如(17)式所示，自由大气中的涡度必发生变化，调整将继续进行，直到边界层顶的垂直速度等于零为止。这是与无相互作用情况完全不同的。

我们不妨再来比较一下调整与非调整两种情况下，边界层中水平风速第一次和地转风平行时的高度处(记作 η_{ST} 和 η_{eT})的垂直速度(记作 $w_e(\eta_{eT})$ 和 $w_S(\eta_{ST})$。因为有时也将此定义为边界层顶的垂直速度。

首先指出，对无相互作用情况而言，由

$$\frac{v_e}{u_e}=\frac{v_g}{u_g} \tag{65}$$

可得

$$\eta_{eT}=\begin{cases}\sqrt{2}\,\mathrm{arc\ tg}\dfrac{A}{B} & (A\neq0,B\neq0)\\ \sqrt{2}\,\Pi & (A=0,B\neq0)\\ \dfrac{\Pi}{\sqrt{2}} & (A\neq0,B=0)\end{cases} \tag{66}$$

式中

$$A=v_0u_g-u_0v_g,\quad B=(u_0-u_g)u_g+(v_0-v_g)v_g \tag{67}$$

于是有：

$$w_e(\eta_{eT})=\begin{cases}(\zeta_g-\zeta_0)\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}-e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\eta_{eT}}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\eta_{eT}+\dfrac{\Pi}{4}\right)\right]+D_0\left[e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\eta_{eT}}\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\eta_{eT}+\dfrac{\Pi}{4}\right)-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right] & (A\neq0,B\neq0)\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e^{-\Pi}+1)(\zeta_g-\zeta_0-D_0) & (A=0,B\neq0)\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\zeta_g-\zeta_0)(1-e^{-\frac{\Pi}{2}})-\dfrac{1}{\sqrt{2}}D_0(1+e^{-\frac{\Pi}{2}}) & (A\neq0,B=0)\end{cases} \tag{68}$$

式中 ζ_g 为地转涡度，ζ_0，D_0 为地面涡度和散度。当地面无风时，有

$$w_e(\eta_{eT})=\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-\pi}+1)\zeta_g \tag{69}$$

这说明边界层中的水平风速第一次与地转风平行处的垂直速度与地转涡度成正比，且数值与边界层顶的垂直速度近似相等。

欲求相互作用后的(即平衡态的) η_{ST} 和 $w_S(\eta_{ST})$，只要将无相互作用的气压场代之以平衡态的气压场即可。此时有：

$$u_g=-\frac{\partial(\varphi_0+\psi_0)}{\partial y},v_g=\frac{\partial(\varphi_0+\psi_0)}{\partial x} \tag{70}$$

在 $A\neq 0$，$B\neq 0$ 的情况下，有

$$\eta_{ST}=\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{A}{B} \tag{71}$$

$$w_S(\eta_{ST})=-\sqrt{2}D_0\,e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\eta_{ST}}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\eta_{ST} \tag{72}$$

这就是考虑了上下两层相互作用后，边界层中水平风速第一次和地转风平行处的垂直速度。

比较(68)和(72)式可知，无相互作用情况下，水平风速第一次和地转风平行处的垂直速度由地转涡度、地面涡度和地面散度三者共同决定；而上下相互作用后，仅由地面散度决定，这是很不相同的。

六、讨　论

本文在给定的地面边值和初值条件下，考虑到正压边界层与自由大气的相互作用，得到了如下一些初步的看法：

1．不管边界层中的初始风压场如何，最终总要调整到仅由地面风场决定的平衡态。平衡态的气压场、速度势、流函数分别由(48)、(49)、(50)式表达。并由此求得了水平风速，由(58)、(59)式表达。

2．当 t 充分大时，描述具体调整过程的非平衡态的气压场、速度势、流函数分别由(44)、(45)、(47)式表达。它们均与初始风压场和地面风场有关。且显见，非平衡态与平衡态之差是按指数式迅速衰减的，也就是说，调整过程是迅速的。

3．不考虑边界层与自由大气的相互作用而得到的水平风速由(53)、(54)式表达。当地面无风时，便为经典的 Ekman 螺线解。比较相互作用和无相互作用的两种解后，我们指出，当无相互作用的解中任给的气压场取值为 $\Pi_e=\varphi_0+\psi_0$ 时，两种解才完全一致。而实际大气总是要相互作用的，这就说明边界层的(定常)气压场应该受到约束，而不能任取。

4．考虑上下层相互作用后，边界层中的垂直速度的垂直分布由(61)式决定。边界层顶的值为零，而水平风速第一次与地转风平行的高度处的垂直速度与地面散度成正比，由(72)式表达。

以上的初步看法是在最简单的正压假定下，且略去了平流作用而得到的，是否恰当，有待进一步讨论。另外，若在斜压情况下或考虑平流作用再加以研究，则将会得到更符合天气事实的结论。

参 考 文 献

[1] 伍荣生等，动力气象学，上海科学技术出版社，129，1983 年。
[2] 霍尔顿，J. R.，动力气象学引论，科学出版社，92，1980。
[3] 郭晓岚讲授，宋伯承整理，大气动力学，江苏科学技术出版社，82，1981。
[4] Диткин В. А. 等，运算微积手册，科学出版社，104—106，149，150，1958。
[5] Charney, J. G., and A. Eliassen, A numerical method for predicting the perturbations of the middle-latitude westerlies, *Tellus*, 1, 38-54, 1949.

ADJUSTMENT OF WIND AND PRESSURE FIELDS IN THE BOUNDARY LAYER

Xu Yinzi　Wu Rongsheng

(Department of Atmospheric Sciences, Nanjing University, Nanjing)

Abstract

The vertical transportation of mass at the top of the boundary layer are considered as a link between the boundary layer and free atmosphere. The adjustment of the wind and pressure fields in the boundary layer is studied under the consideration of the interaction between the boundary layer and free atmosphere. The vertical motion at the top of the boundary layer is evaluated. The results show that the distinguished differences of the present results with classical Ekman layer do exist and they are discussed in the paper.