第45卷 第1期　　气象学报　　Vol. 45, No. 1
1987年2月　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　Feb., 1987

用车贝雪夫多项式预报气象产量地理分布的试验*

于系民　毕伯钧　冯耀煌

（辽宁省气象科学研究所）　（辽宁省本溪市气象台）　（辽宁省气象科学研究所）

提　要

本文以辽宁省中北部地区玉米气象产量区域分布的预报为例，论述了车贝雪夫多项式在农业气象预报中的若干应用。作者用不规则格点上的车贝雪夫多项式，以大气环流为候选预报因子，求得展开式系数依赖于4—6个因子的方程，并由此报出区域各县产量，绘出预报图，作试报检验。结果表明：车贝雪夫多项式可用于区域产量预报。最后讨论了此方法在农业气象预报其他领域（如发育期、病虫害预报）中的应用前景，指出车贝雪夫多项式用于生物学、地学预报中的意义。

一、引　言

目前的气象产量预报，大都通过统计推断先作点上预报，再外推到一个区域。这实质上是单站农业气象预报。正如天气预报，有从单站向区域分布发展的历程一样，产量预报也应有从单站向区域发展的阶段。预报因子从单站要素到环流、海温等，对这种发展有积极作用，但因一次预报对象仍为单点，不能说完成了区域预报方法的改进工作。本文则想通过选择适宜数学模型，以计算机为工具，一次报出在大气环流相同的控制因子下气象产量分布。

在数学上，一些正交函数（如球函数、经验正交函数、Legendre多项式等）能作这类展开和预报，但由于其模型和计算太复杂，在农业气象学中很难实用。特殊函数中的车贝雪夫（原文 Чебышев，英译 Chebyshev 或 Tcheby-cheff）多项式是一种正交函数多项式[1]，它有多种形式。其中离散点上的平方内插函数之正交多项式，被 Wadsworth 与 Bryan[2]、Багров[3]、张家诚等[4]用于天气学研究中，但限于等距格点情形，故受许多限制。Немчинов[5]在用车贝雪夫多项式研究春小麦产量与雨量、蒸发等气象因素关系时，探讨了多项式统计特征和正则方程解法，构成他经济统计的重要内容，但不能解决区域分布问题。周家斌[6]将车贝雪夫多项式推广到不规则格点，本文拟用这种改进的形式，试作农业气象预报。

二、资料来源和处理方法

用两套大气环流资料1)，作为候选预报因子：其一为亚欧地区（45—60°N，0—150°E）

* 本文于1984年4月13日收到，1985年6月14日收到修改稿。

1）中央气象台长期组，长期天气预报技术经验总结（附录），1976。

500 毫巴逐月平均纬向环流指数 I_z和经向环流指数 I_M，每月 2 个，每年 24 个候选预报因子；其二为 A·A·Гирс[7]阐述的 Г·Я·Вангенгейм 的 W、E、C 三种环流型日数，每月 3 个，每年 36 个候选预报因子。

辽宁中北部产量原始资料，只取玉米一种作物，抄自辽宁省统计局印发的1961—1982年国民经济统计年鉴。这些原始玉米实际产量资料，是农业生产力水平、土壤、技术、管理经营以及气象条件综合作用的结果。为满足本工作之需，我们依各县玉米产量资料，用时间序列方法先求出趋势产量，再拿实际产量与趋势产量对照，得出 1961—1981 年各县逐年的气象产量，作为最终的预报对象。

三、基本原理和统计计算步骤

一个区域的气象产量预报，不可能要求很准确，因受种种条件限制，往往只要求最大误差不超过某一临界值，或基本趋势大体正确。而车贝雪夫正交系 (Chebyshev orthogonal system) 的目标恰好是使最大误差取极小值，所以这种近似方法对气象产量分布预报是可行的。

由标准车贝雪夫多项式的基本定义[8]：

$$\phi_0(x)=1$$

$$\phi_n(x)=\cos(n\arccos x)\quad n=1,2,\cdots$$

以及

$$\phi_{-n}(x)=\phi_n(x)$$

x 的区间为

$$-1\leqslant x\leqslant 1$$

用符号 $\theta=\arccos x$

我们有

$$x=\cos\theta$$

递推公式

$$\phi_{n+1}(x)-2x\phi_n(x)+\phi_{n-1}(x)=0$$

车贝雪夫多项式具有正交性，即

$$\sum_{-1}^{1}\omega(x)\phi_l(x)\phi_m(x)=\begin{cases}0 & 当\ l\neq m\\ \pi/2 & 当\ l=m\neq 0\\ \pi & 当\ l=m=0\end{cases}$$

"权重函数"$\omega(x)=1/(1-x)^{\frac{1}{2}}$。

由于当 $l\neq m$ 时，$\sum_{-1}^{1}\omega(x)\phi_l(x)\phi_m(x)=0$，所以在一个矩阵中必然有许多项为 0，计算起来并不十分困难。

对于点的离散集，车贝雪夫多项式同样是正交的。为了求出 $\phi_l(x_p)$多项式($x_p=1,2,\cdots,n$)集的整数，用 $\xi(x)$代替 $\phi(x)$，有

$$\xi_{r+1}=\lambda_r\left[\xi\xi_r-\frac{r^2(n^2-r^2)}{4(4r^2-1)}\xi_{r-1}\right]$$

其中 $\xi=\frac{1}{2}(n-x)$

及 $x=1,3,5,\cdots,(2n-1)$。n 指示点数。λ_r 是任意乘子。于是，

$$\xi_0=1,\ \xi_1=\xi,\ \xi_2=\lambda_2\left[\xi^2-\frac{n^2-1}{4\cdot 3}\right],\ \xi_3=\lambda_3\left[\xi^3-\frac{3n^2-7}{20}\right]$$

$$\xi_4=\lambda_4\left[\xi^4-\frac{6n^2-26}{4\cdot 7}\xi^2+\frac{3(n^2-9)(n^2-1)}{4\cdot 140}\right]$$

根据车贝雪夫多项式的基本性质和文献[6]、[9]的简化改进，我们利用辽宁中北部地区多年平均各县气象产量分布图，选取有代表性的县（市）命以编号。我们在选取代表县（市）格点位置时，并不以县城所在地为中心，而选在玉米面积较大的乡，以便对全县更有代表性。我们不用地面气象观测数据为预报因子，而认为：气象产量形成受大气环流支配，故选点时更不必考虑气象站位置；另外，座标编号第二个序号相同点的连线，应尽可能与多年平均气象产量等值线平行。这样选择格点，能减少展开所需项数，于是提高了收敛速度，减小拟合误差，使展开式系数更有代表性。选择结果如图 1。图中的细虚线代表气象产量等值线，气象产量标于图边（单位：斤/亩），实线为 j 相同的点的连线，长划虚线为 i 相同的点的连线，括号内标号为 (i,j)，具体如下：

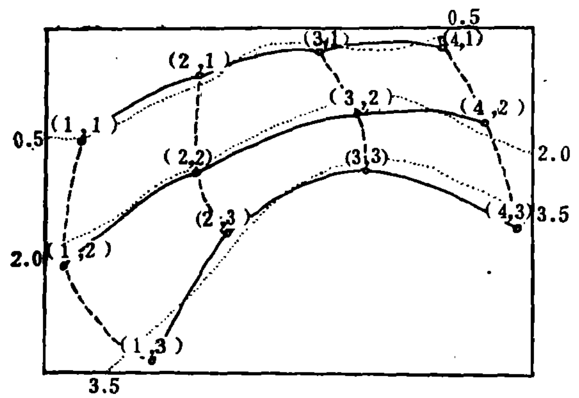

图 1　辽宁中北部地区玉米气象产量（斤/亩）的平均分布及格点编号

(1,1) 阜新；(2,1)彰武；(3,1)法库；(4,1)开原；(1,2) 锦县；(2,2)黑山；(3,2)铁岭；(4,2)清原；(1,3) 营口；(2,3)辽中；(3,3)沈阳；(4,3)桓仁。

为制作气象产量区域分布预报，我们对车贝雪夫多项式作规一化处理[1)]，

$$\tilde{\phi}_n(x)=\phi_n(x)\Big/\sqrt{\sum_{n=1}^{N_0}\phi_n^2(x)}$$

其中 N_0 为展开式最高阶数。具体化到二维情形我们求出 $\varphi_k(i)$ 和 $\psi_s(j)$，并有气象产量分布展开式系数 $A_{ks}(t)$：

$$A_{ks}(t)=\sum_{i=1}^{I_0}\sum_{j=1}^{J_0}Z(t,i,j)\tilde{\varphi}_k(i)\tilde{\psi}_s(j) \tag{1}$$

其中 $k=0,1,\cdots,K_0$；$s=0,1,\cdots,S_0$；$t=1,2,\cdots,T_0$；I_0，J_0分别为沿东西向（横向）、南北向（纵向）格点的个数；$Z(t,i,j,)$ 为代表县 (i,j) 第 t 年气象产量实测值；$\tilde{\varphi}_k(i)$ 和 $\tilde{\psi}_s(j)$为二维的规一化车贝雪夫多项式；K_0，S_0为展开时所取的最高阶数。本例中 $I_0=4$，

1) 周家斌，车贝雪夫多项式及其在天气分析和预报中的应用（大气所五室文集 11 号），第 10—12 页，1982。

$J_0=3, K_0=3, S_0=2, T_0=20$。这样可得到12个车贝雪夫系数序列 $\{A_{ks}(t), k=0,1,2,3, s=0,1,2, t=1,2,\cdots,20\}$，以每个序列作为因变量，以60个环流因子（均有20个样本）作为自变量，进行回归筛选，得出12个车贝雪夫系数方程：

$$\hat{A}_{00}(t)=41.8506-4.7183\,B_4+1.7844\,B_{17}-7.1209\,B_{26}-4.9883\,B_{33}+28.4025\,B_{56} \quad (2.1)$$

$$\hat{A}_{01}(t)=-157.7535+1.3410\,B_1-2.9028\,B_4+2.0301\,B_{22}+9.1072\,B_{56} \quad (2.2)$$

$$\hat{A}_{02}(t)=-299.6653+0.8837\,B_1+0.8074\,B_4+0.5251\,B_5+4.6971\,B_{41}+1.5110\,B_{42}+2.2833\,B_{55} \quad (2.3)$$

$$\hat{A}_{10}(t)=-451.7253+3.3232\,B_{13}+7.3707\,B_{14}+4.7524\,B_{20}-3.2513\,B_{21}+7.0418\,B_{45}+2.6032\,B_{49} \quad (2.4)$$

$$\hat{A}_{11}(t)=118.2402-2.6428\,B_8+6.4274\,B_{33}-6.2586\,B_{41}+8.2197\,B_{51}-7.0468\,B_{56} \quad (2.5)$$

$$\hat{A}_{12}(t)=44.7109-1.8050\,B_8+3.5777\,B_{10}-0.8185\,B_{17}+2.5195\,B_{27}-1.8695\,B_{44}-3.0296\,B_{50} \quad (2.6)$$

$$\hat{A}_{20}(t)=-209.9951-0.9435\,B_3+2.8872\,B_{24}+5.6965\,B_{50}+6.0586\,B_{57} \quad (2.7)$$

$$\hat{A}_{21}(t)=377.7253-2.5291\,B_{13}-6.3027\,B_{14}+4.2505\,B_{28}+2.5172\,B_{37} \quad (2.8)$$

$$\hat{A}_{22}(t)=-163.8470+0.7168\,B_1+0.5133\,B_5+0.7532\,B_{19}-1.1913\,B_{22}-1.6918\,B_{36} \quad (2.9)$$

$$\hat{A}_{30}(t)=110.2501+2.2373\,B_{10}-1.8316\,B_{16}-1.3565\,B_{17}+3.2013\,B_{56} \quad (2.10)$$

$$\hat{A}_{31}(t)=15.4043+0.6413\,B_3-1.9638\,B_{50}-2.0938\,B_{52}-5.1004\,B_{57} \quad (2.11)$$

$$\hat{A}_{32}(t)=-84.5752+1.0791\,B_{12}+1.7278\,B_{26}-0.8798\,B_{44}+1.2357\,B_{55} \quad (2.12)$$

式中 B_4, B_{17} 等代表选中的第 $t-1$ 年的自变量值。$t=1$ 代表1961年，余类推。

按 $\alpha=0.05$ 的显著度水平，检验(2.1)—(2.12)，均通过，其中大部分按 $\alpha=0.01$ 的水平，亦通过检验。

为用第 t 年预报因子的实测值，预报第 $t+1$ 年的气象产量，须先将第 t 年实测值 B 代入式(2)，求得 $\hat{A}_{ks}(t+1)$，$(k=0,1,2,3; s=0,1,2)$；再将 $\hat{A}_{ks}(t+1)$ 代入展开式[9]：

$$\hat{Z}(t+1,i,j)=\sum_{k=0}^{K_0}\sum_{s=0}^{S_0}\hat{A}_{ks}(t+1)\tilde{\varphi}_k(i)\tilde{\psi}_s(j) \quad (3)$$

式中 $\hat{Z}(t+1,i,j)$ 为代表县 (i,j) 第 $t+1$ 年气象产量预报值。

通过上述步骤，我们用历史数据作了拟合检验，相对误差一般在20%以下，就目前气象产量预报准确水平而论，尚可接受。

概括地说，用车贝雪夫多项式作区域气象产量分布的预报，分为如下几步：

(1) 由实际产量算出气象产量；

(2) 选代表县，根据确定的 I_0, J_0, K_0, S_0 计算规一化车贝雪夫多项式值；

(3) 将有关数据代入式(1)，求出车贝雪夫系数 $\hat{A}_{ks}(t)$；

(4) 用回归筛选求出 $\hat{A}_{ks}(t)$ 的方程[形式如(2.1)—(2.12)]；

(5) 将历年的预报因子值依次代回式(2)、(3)，算出 $\hat{Z}(t,i,j)$ 并作历史拟合检验；

(6) 具体作某一年预报时,先将因子代入(2)求出 $\hat{A}_{i,s}(t)$,再代入(3),得预报结果。

(7) 将历年的预报因子值依次代回式(2)、(3)算出 $\hat{Z}_{ij}$,并作历史拟合检验。

上述全部计算工作,我们系用标准算法语言 FORTRAN IV 在型号为 FELIXC-512 计算机上一次实现,给出供农业气象业务预报用的公式和软件。

四、试报实例及方法的讨论

得出方程(2.1)—(2.12)后,业务预报只是一个代数运算过程。我们根据方程(2.1)—(2.12)中右边 B_4 等 1980 年的实际值,作 1981 年的区域预报,试报及检验均按表 1 所给出的五级标准。预报 1981 年结果如下:法库经新民至盘山一线以西,是极高产区;台安、大洼和海城西部为高产区;辽中、辽阳和鞍山为低产区;开原、铁岭、沈阳、灯塔以东为极低产区。(图略)

因为业务预报采用的是分五级的趋势预报,评定时只能采用经验评分办法。令预报

表 1 用车贝雪夫多项式时产量预报级别及其意义

气象产量(斤/亩)	>10	10—4	4—-4	-4—-10	<-10
级别 Q	1	2	3	4	5
Q 的意义	极高产	高产	平产	低产	极低产

级别为 Q_F,实况级别 Q_A,准确率评分为 R,并定义判别式:

$$R=|Q_F-Q_A| \tag{4}$$

规定:$R=0$,准确率为 90%;$R=1$,准确率为 75%;$R=2$,准确率为 60%;$R\geqslant3$,准确率为 30%。1981 年试报准确率为 90%、75%和 60%的范围,如图 2 所示,其中 90%区所占面积很大,≤75%的区域位于黑山、新民以南,直至沿海。从整个辽宁省中北部地区来说,准确率 75%以下区域比较接近沿海,低洼易涝地的面积较大,天气变化对产量振动影响明显些,趋势产量、气象产量均不易准确求出,对用车贝雪夫多项式作预报的准确率会有一定影响。图 2 表明:各不同准确率的覆盖面积不同,我们用面积加权法算出整个区域的预报准确率为 85.68%。

现仅就产量预报的进展和现状,讨论区域预报的一些方法问题。产量与气象关系的研究是早就有许多人搞过的,参与研究者包括数学、农学、经济、气象、地理等学科的学者,但尚未确立象天气动力和统计预报那样公认的预报理论和业务系统,而且迄今为止,各种气象产量预报基本是以点代面或者是按某个区域平均的[10]。关于车贝雪夫多项式在气象学中的应用在 50—60 年代就有所研究;在产量与气象条件关系上的研究最早出于 Немчинов[5]。本文把在气象学中和农业数量经济学中的应用,结合起来作综合考虑,并利用国内最新的简化方法、较快的计算设备,试研究了在产量预报方面的初步应用。这可算是对 Немчинов 经济数学中应用正交函数的推广;从广义的气象学科来说,是对张家诚等[4]、周家斌[6,9]统计预报研究扩充到专业气象领域的一点尝试。农业气象预报从单点单站向一个地理区域定量化预报的迈进,正交特殊函数的应用将是一种有效的途径,预计未

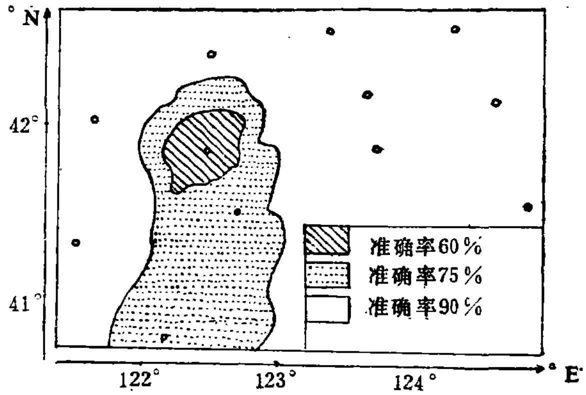

图 2　用车贝雪夫多项式预报的 1981 年产量等级准确率分布

来会有不少农业气象工作者从这方面努力，取得成果。当然从点到区域预报的过渡，是一个新的课题，必然遇到很多困难。同气象预报的其他领域一样，只是历史趋势拟合及一两次试报结果，不能说所得经验公式在实际业务中一定好用。因为统计方法总是以历史数据为基础的，历史数据的代表性较差，必然影响预报的质量。统计局产量资料本身就不十分可靠，加上“气象产量”又是经加工的产物；而在大气环流因子的选取中，难于考察环流对产量影响的生物-物理意义，必然会带有主观性，致使经验方程不够准确，影响预报质量。影响预报效果的另一原因是因子观测点只有 20 个，样本容量不够大，虽就一般显著度检验回归方程可用，但按 Lund[11]、冯康[12]的回归方程 Monte Carlo 模拟检验法，一般有很多方程是不显著的。要解决此问题，或扩大样本容量，或采用 Monte Carlo 模拟检验法来解决；用后一种方法虽使建模工作困难，但若完成，实用效果会更好。

五、在农业气象预报其他领域中的可能应用

如所周知，农业气象预报不限于产量预报。车贝雪夫多项式在农业气象预报的其他领域也是可用的，现对其可行性分析如下：

(1) 农作物(自然)物候期的区域预报：我国物候研究历史久远，现在全国又有统一站网、统一规范，旨在获取系统资料。资料积累多了当可象用车贝雪夫多项式预报气象产量一样，经有关因子选取，预报物候推移地理特征。由于短中期数值预报模式的改进，利用其输出结果，改善物候预报因子，用 MOS 方法报物候趋势的地理分布是完全可行的。在我国，模式输出图和微机已普及到县站，为上述预报提供了方便条件。

(2) 作物病虫害预报。在病虫害资料积累较多时，可通过病虫害与大气环流关系的研究成果，象产量、物候预报一样，用车贝雪夫多项式预报病虫气象的长中短期趋势。

(3) 作物生理旱涝规律预报。这实际上是既考虑大气，又考虑作物、土壤物理特性的生物气象预报，如果区域记录较完整，用车贝雪夫多项式展开可完成旱涝自动监测和模式识别系统，这对抗旱防汛现代化指挥系统无疑是很有价值的。

(4)在牧草及畜禽疫病流行与气象关系预报中的应用。前者实际是植物生育预报，与(1)、(2)类似；后者系致病微生物与气象关系的区域预报，只要有一定数据，即可施行。

综上所述，由于车贝雪夫多项式有正交性、不等距格点展开简易性等优点，随着计算设备的好转，它在生物学和地学领域中的应用前景，是很广阔的。

参 考 文 献

[1] 王竹溪、郭敦仁，特殊函数概论，194-196，科学出版社，1964。
[2] Wadsworth, G. P., and J. G. Bryan, Short range and extended forecasting by statistical methods, U. S. Air Force *Air Weather Service Tech. Report*, **105** 38, 1948.
[3] Багров, Н. А., Аналитическое представление полей, *Труды ЦИП*, **64** 3—25, 1958.
[4] 张家诚、周家斌、黄文杰、马维华，用车贝雪夫多项式研究月平均500毫巴等压面位势场的初步结果，气象学报，第33卷，No.3, 231-244, 1963。
[5] Немчинов, В. С., *Экономико-Математические* Методы и Модели, 109—142, Издательство <Мысль>, Москва, 1965.
[6] 周家斌，不规则格点上的车贝雪夫多项式的展开问题，大气科学，第7卷，No.3, 239-248, 1983。
[7] Гирс, А. А., *Основы по Долгосрочным Прогнозам Погоды*, 120—165, Гидрометеоиздат, Ленинград, 1960.
[8] Essenwanger, O., *Applied Statistics in Atmospheric Science*, 197—199, Elesevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1976.
[9] 周家斌，气象要素场水平分布的统计预报方法(一)——长江中下游地区降水分布的预报，大气科学，第6卷，No.4, 386—393, 1982。
[10] Kogan, F. N., Perspectives for grain production in the U.S.S.R., *Agricultural Meteorology*, **28**, 3,213—217,1983.
[11] Lund, I. A., A Monte Carlo method for testing the statistical significance of a regression equation, *Journal of Applied Meteorology*, **9**, 3, 330—332, 1970.
[12] 冯康，数值计算方法，237,国防工业出版社，1980。

SOME APPLICATIONS OF CHEBYSHEV POLYNOMIALS IN FORECASTING THE DISTRIBUTION OF METEOROLOGICAL YIELDS

Yu Ximin

(*Meteorological Research Institute, Liaoning Province*)

Bi Bojun

(*Benxi Meteorological Observatory, Liaoning Province*)

Feng Yaohuang

(*Meteorological Research Institute, Liaoning Province*)

Abstract

In this paper, the authors have described the applications of Chebyshev polynomials in forecasting the geographical distribution of meteorological yields of maize crop in the Central-Northern region of Liaoning Province. By using Chebyshev polynomials on irregular grids and basing on 60 candidate predictors for atmospheric circulations 12 statistical equations were obtained. By means of these equation, the meteorological yields for thirteen stations in this region were forecasted. The results show that Chebyshev polynomials are applicable to regional forecasting of crop yields. We have also the opinion that Chebyshev polynomails can be used in other fields of agrometeorological forecasting (such as phenological stage, and pest forecastings).