

地转风适应过程的数值试验研究*

陈秋士 卢咸池 王衡

(北京大学地球物理系)

提 要

本文用C-网格模拟了地转风适应过程,给出了能量及位涡守恒关系和微分方程相一致的一种差分格式,并讨论了时间差分对重力惯性波频散特性的影响。为了保持计算稳定性,提出了一种改进的向前向后时间积分方法。通过实例计算,说明了有限区域各种边界条件对重力惯性波传播的影响。

一、引 言

当运用分解算法^[1-4]研究大气运动时,数值计算的一个重要问题,是如何分别计算好平流过程和调整过程,以及如何作好这两个过程的相互联结。在分解方法中,地转风适应过程基本是线性的,已有很多作者讨论过它的解析解,如Кибель^[5],Монин^[6],曾庆存^[7],陈秋士^[8]等。为了检验数值方法的精度,必须比较差分解和解析解的区别。本文试图采用差分方法,较详细地分析适应过程的解,以求找出一种能正确描述地转风适应过程的空间和时间差分方法。

Winninghoff(1968)^[9]曾经发现,用差分方法模拟地转风适应过程的效果和变量在网格点上的分布有很大关系。根据Arakawa和Lamb(1977)^[10]的讨论,C-网格能比较好地模拟重力波的频散过程。在本文中,空间差分采用C-网格。但不同的时间差分对适应过程也有影响,为了克服向前向后时间积分可能出现的计算不稳定,我们提出一种改进的向前向后时间积分方法,并比较了欧拉向后方法和向前向后方法模拟适应过程的计算结果。本文是在有限区域内求解,因此还讨论了不同的侧向边界条件对适应过程的影响。

二、地转风适应过程的简化方程及其积分制约

陈秋士、卢咸池^[11]讨论了一种浅水模式的显式分解算法,适应过程的方程可简化为

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + f_0 \mathbf{k} \times \mathbf{V} + g \nabla z = 0 & (1) \\ \frac{\partial z}{\partial t} + H_0 \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 & (2) \end{cases}$$

* 本文于1984年6月20日收到,1985年5月7日收到修改稿。

这里 H_0 为流体平均厚度的表征, f_0 为平均柯氏参数。

以 $H_0 \mathbf{V}$ 点乘(1), gz 乘(2)并相加有

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(H_0 K + g \frac{z^2}{2} \right) + \nabla \cdot g H_0 z \mathbf{V} = 0 \quad (3)$$

在闭区域 S 内积分, 得

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \left(H_0 K + g \frac{z^2}{2} \right) ds = 0 \quad (4)$$

它表示适应过程中, 闭区域内位能和动能守恒。

把(1)写成涡度形式, 有

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + f_0 \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (5)$$

结合(2), 有

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\xi - \frac{f_0}{H_0} z \right) = 0 \quad (6)$$

$\xi - \frac{f_0}{H_0} z$ 可表示位涡度, 由(6)有

$$\xi - \frac{f_0}{H_0} z = \xi^* - \frac{f_0}{H_0} z^* = \Omega^*(x, y) \quad (7)$$

ξ^* 和 z^* 分别为适应过程初始时刻的涡度和高度, (7) 表示适应过程中位涡度不随时间变化。

三、适应过程的空间差分及其守恒关系

采用如图 1 所示的 C-网格。本节中, 时间变化仍保留微商的形式, 时间差分留待下节讨论。在直角坐标系中(1)和(2)可写成

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} u_{i,j+\frac{1}{2}} - f_0 \hat{v}_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{g}{d} (z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - z_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) = 0 \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} v_{i+\frac{1}{2},j} + f_0 \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{g}{d} (z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - z_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) = 0 \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \frac{H_0}{d} (u_{i+1,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i+\frac{1}{2},j+1} - v_{i+\frac{1}{2},j}) = 0 \end{array} \right. \quad (10)$$

令

$$\xi_{i,j} = \frac{1}{d} (u_{i,j-\frac{1}{2}} - u_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i+\frac{1}{2},j} - v_{i-\frac{1}{2},j}) \quad (11)$$

将(11)对 t 求微商, 并将(8)和(9)代入, 得涡度方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi_{i,j} + \frac{f_0}{d} (\hat{v}_{i,j+\frac{1}{2}} - \hat{v}_{i,j-\frac{1}{2}} + \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} - \hat{u}_{i-\frac{1}{2},j}) = 0 \quad (12)$$

这里定义

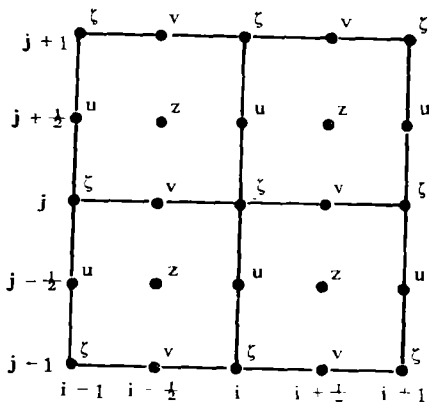


图 1 C-网格的变量分布

和(12)结合, 可得位涡度守恒关系

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi_{i,j} - \frac{f_0}{H_0} \frac{\partial}{\partial t} z_{i,j}^{(\zeta)} = 0 \tag{19}$$

对时间积分, 则有

$$\xi_{i,j} - \frac{f_0}{H_0} z_{i,j}^{(\zeta)*} = \xi_{i,j}^* - \frac{f_0}{H_0} z_{i,j}^{(\zeta)*} \tag{20}$$

把动能写在 z 点上, 令

$$K_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^2 + u_{i, j+\frac{1}{2}}^2 + v_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^2 + v_{i+\frac{1}{2}, j}^2) \tag{21}$$

将(21)乘以 H_0 , 对 t 微商, 并代入(8)、(9), 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (H_0 K)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = & \frac{H_0}{2} \{ u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} [f_0 \hat{v}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - \frac{g}{d} (z_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}} - z_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}})] \\ & + u_{i, j+\frac{1}{2}} [f_0 \hat{v}_{i, j+\frac{1}{2}} - \frac{g}{d} (z_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - z_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}})] \\ & - v_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} [f_0 \hat{u}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + \frac{g}{d} (z_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}} - z_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}})] \\ & - v_{i+\frac{1}{2}, j} [f_0 \hat{u}_{i+\frac{1}{2}, j} + \frac{g}{d} (z_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - z_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}})] \} \end{aligned} \tag{22}$$

将(10)乘以 $g z_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}$, 得位能方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} g z_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^2 + \frac{g H_0}{d} (u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - u_{i, j+\frac{1}{2}} + v_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - v_{i+\frac{1}{2}, j}) z_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = 0 \tag{23}$$

将(22)和(23)相加, 并对全区域 z 点求和, 注意到对跳点网格内点上的变量求和有如下关系:

$$\sum_{a点} a_{i,j} (\bar{b}^{xy})_{i,j} = \sum_{b点} b_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} (\bar{a}^{xy})_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \tag{24}$$

$$\sum_{a点} a_{i,j} (c_{i+\frac{1}{2}, j} - c_{i-\frac{1}{2}, j}) = - \sum_{c点} c_{j+\frac{1}{2}, i} (a_{i+1, j} - a_{i, j}) \tag{25}$$

$$(\bar{\alpha}^x)_{i,j} \equiv \frac{1}{2} (\alpha_{i+\frac{1}{2}, j} + \alpha_{i-\frac{1}{2}, j}) \tag{13}$$

$$(\bar{\alpha}^{xy})_{i,j} \equiv (\bar{\alpha}^x)_{i,j}^y \tag{14}$$

令 $\hat{u}_{i+\frac{1}{2}, j} = (\bar{u}^{xy})_{i+\frac{1}{2}, j}$ (15)

$$\hat{v}_{i, j+\frac{1}{2}} = (\bar{v}^{xy})_{i, j+\frac{1}{2}} \tag{16}$$

和 $z_{i,j}^{(\zeta)} = (\bar{z}^{xy})_{i,j}$ (17)

将(17)对 t 微商, 代入(10), 可得

$$\frac{\partial}{\partial t} z_{i,j}^{(\zeta)} + \frac{H_0}{d} (\hat{v}_{i, j+\frac{1}{2}} - \hat{v}_{i, j-\frac{1}{2}} + \hat{u}_{i+\frac{1}{2}, j} - \hat{u}_{i-\frac{1}{2}, j}) = 0 \tag{18}$$

对 y 方向上变量乘积求和也有和(25)类似的关系, 由此得适应过程中封闭区域内有

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{z \text{ 点}} \left(H_0 K + \frac{1}{2} g z^2 \right) = 0 \quad (26)$$

(26)和(20)表明, c-网格的差分方程满足微分方程所规定的约束(4)和(7)。

四、重力惯性波的时间积分方法及其讨论

Winninghoff(1968)^[9]主要比较了微分方程和不同空间网格的微分-差分方程的频散关系。但实际计算中, 时间也要采取差分形式, 从而使频散关系发生变化。因此有必要了解时间差分格式的影响。

先考察一维情况, 将(8)–(10)写为

$$\frac{\partial}{\partial t} u_j - f_0 \bar{v}_j^* + \frac{g}{d} (z_{j+\frac{1}{2}} - z_{j-\frac{1}{2}}) = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_{j+\frac{1}{2}} + f_0 \bar{u}_{j+\frac{1}{2}} = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} z_{j+\frac{1}{2}} + \frac{H_0}{d} (u_{j+1} - u_j) = 0 \quad (29)$$

这里 $x_j = jd$ ($j=1, 2, \dots$)。令 w 表示 u, v, z 中任一变量, (27)–(29)可统一写为

$$\frac{\partial w}{\partial t} = f(w, t) \quad (30)$$

先讨论欧拉后差(Matsuno)格式, 由(30)得

$$\begin{cases} w^{n+1*} = w^n + \Delta t \cdot f^n \\ w^{n+1} = w^n + \Delta t \cdot f^{n+1*} \end{cases} \quad (31)$$

令
或

$$w^{n+1} = r w^n \quad (32)$$

$$\begin{pmatrix} u_j^n \\ v_j^n \\ z_j^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} R^n e^{i(kjd - \nu n \Delta t)} \quad (33)$$

即

$$r = R e^{-i\nu \Delta t} \quad (34)$$

令 $w^{n+1*} = r^* w^n$, 代入(27)–(29), 并利用(31), 最后消去 r^* , 得

$$r = 1 \pm i\Omega \Delta t - \Omega^2 \Delta t^2 \quad (35)$$

其中

$$\Omega^2 = f_0^2 \cos^2 \left(\frac{kd}{2} \right) + 4 \frac{gH_0}{d^2} \sin^2 \left(\frac{kd}{2} \right) \quad (36)$$

由此得

$$|R| = \sqrt{1 - \Omega^2 \Delta t^2 + \Omega^4 \Delta t^4} \quad (37)$$

$$|\nu| = \frac{1}{\Delta t} \tan^{-1} \frac{\Omega \Delta t}{1 - \Omega^2 \Delta t^2} \quad (38)$$

由(37)可知, 当 $\Omega \Delta t \leq 1$, 有 $|R| \leq 1$, 此时 Matsuno 格式是稳定的。为了考察它的频散特性, 可根据(38)绘制频率和波长的依赖关系图。当 $L_0/d = 5$ 时 ($L_0^2 = gH_0/f_0^2$), 微

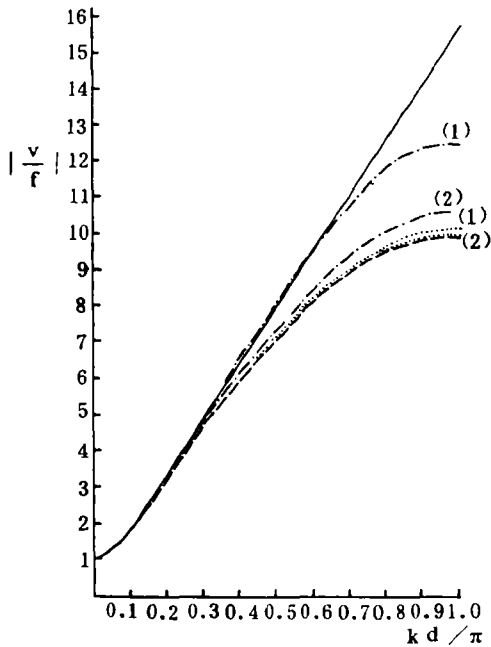


图 2 不同时间差格式的频散关系
 (实线: 微分方程 虚线: 微分-差分方程
 划线: 欧拉后差 点线: 向前向后
 ① $f\Delta t=0.06$ ② $f\Delta t=0.03$)

分方程、微分-差分方程以及 Matsuno 格式的频散关系如图 2 所示。由图中可以看出, Matsuno 格式的频散关系和微分方程及微分-差分方程都很相似; Δt 愈小, 愈接近于微分-差分方程的结果。因此它能较好地描述地转适应过程。

但是, 当 $|R| < 1$ 时, Matsuno 格式对波 (特别对高频波) 有阻尼作用。而在微分方程 (1)–(2) 中, 重力惯性波是中性的, 只有频散, 没有阻尼的过程。因此, Matsuno 格式可能使与降水相联系的重力惯性波过程产生人为的衰减。此外, Matsuno 格式是 Δt 的一阶精度, 而且每计算一个时间步长需作两次计算, 要花费较多的计算机时。因此有必要找寻一种精度和效率更高的格式。

Gadd(1978)^[4]所提出的分解算法中, 用 Lax-Wendroff 格式计算平流过程, 用向前向后格式计算适应过程。他发现如在 C-网格上用这样的格式计算, 往往是不稳定的。

我们也发现了类似的情况^[11]。下面对向前向后格式不稳定的原因作一些分析, 并提出改进方法。

对一维情形, 向前向后格式可以写为

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t (g \delta_x z - f_0 \bar{v}^x)_j^n \\ v_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = v_{j+\frac{1}{2}}^n - \Delta t f_0 (\bar{u}^x)_{j+\frac{1}{2}}^n \\ z_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = z_{j+\frac{1}{2}}^n - H_0 \Delta t (\delta_x u)_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \end{cases} \quad (39)$$

其中 $(\delta_x a)_j = (a_{j+\frac{1}{2}} - a_{j-\frac{1}{2}})/d$ 。将 (33) 代入 (39), 并利用 (32) 和 (34), 有

$$|R| = \sqrt{1 + f_0^2 \cos^2\left(\frac{kd}{2}\right) \Delta t^2} \quad (40)$$

$$|v| = \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1}\left(\frac{1}{2} \Omega \Delta t\right) \quad (41)$$

向前向后格式的频散关系也绘于图 2 中。由图可见, 它与微分-差分方程非常接近, 所以它也能较好地描述适应过程。只有当 $kd/\pi > 0.5$, 即波长小于 $4d$ 时, 和微分-差分方程一样, 频散关系与微分方程相差较明显。但由 (40) 知道, 不论 Δt 取多小, 恒有 $|R| > 1$, 即它是绝对不稳定的, 只是当 Δt 很小时, 不稳定的程度很微弱。

为了避免差分解的振幅随时间增长, 我们将向前向后格式作如下改进, 取

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t (g \delta_x z - f_0 \bar{v}^x)^n \\ v_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = v_{i+\frac{1}{2}}^n - \Delta t f_0 (\bar{u}^x)_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \\ z_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = z_{i+\frac{1}{2}}^n - H_0 \Delta t (\delta_x u)_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \end{cases} \quad (42)$$

与前面的推导相似, 可得当 $\Omega \Delta t \leq 2$ 时,

$$|R| = 1 \quad (43)$$

$$|\nu| = \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1} \left(\frac{1}{2} \Omega \Delta t \right) \quad (44)$$

即改进后的向前向后格式是中性稳定的, 而它的频散关系没有变化。

对二维情况, 改进后的向前向后格式为

$$\begin{cases} u_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = u_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \Delta t (g \delta_x z - f_0 \hat{v})_{i,j+\frac{1}{2}}^n \\ v_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = v_{i+\frac{1}{2},j}^n - \Delta t (g \delta_y z^n + f_0 \hat{u}^{n+1})_{i+\frac{1}{2},j} \\ z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} = z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - H_0 \Delta t (\delta_x u + \delta_y v)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} \end{cases} \quad (45)$$

由一维情况推出的结论, 对二维情况仍成立。采用向前向后格式计算时间积分, 不仅可以提高运算速度, 而且可节省内存。

五、正压适应过程的计算实例

我们用一个简单的例子来讨论适应过程数值模拟的具体特点。和 Обухов(1949)^[12] 相似, 取初始流场为一辐散的圆型涡旋, 自由面水平, 即

$$\begin{cases} \psi_0(x, y) = A \left[2 + \left(\frac{R}{L_0} \right)^2 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] e^{-\frac{r^2}{2R^2}} \\ z_0(x, y) = H_0 \end{cases} \quad (46)$$

其中 $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, (x_0, y_0) 为扰源中心, $L_0 = \sqrt{gH_0}/f_0$ 为 Rossby 变形半径。与之对应的初始风场、涡度场为

$$\begin{cases} u_0 = -\frac{\partial \psi_0}{\partial y} = \frac{A}{R^2} (y-y_0) \left[4 + \left(\frac{R}{L_0} \right)^2 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] e^{-\frac{r^2}{2R^2}} \\ v_0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial x} = -\frac{A}{R^2} (x-x_0) \left[4 + \left(\frac{R}{L_0} \right)^2 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] e^{-\frac{r^2}{2R^2}} \end{cases} \quad (47)$$

$$\xi_0 = \nabla^2 \psi_0 = -\frac{A}{R^2} \left[8 + 2 \left(\frac{R}{L_0} \right)^2 - 8 \left(\frac{r}{R} \right)^2 - \left(\frac{r}{L_0} \right)^2 + \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right] e^{-\frac{r^2}{2R^2}} \quad (48)$$

适应过程终态的流场、高度场和风场为

$$\begin{cases} \psi_\infty = A \left[2 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] e^{-\frac{r^2}{2R^2}} \\ z_\infty = H_0 + \frac{A f_0}{g} \left[2 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] e^{-\frac{r^2}{2R^2}} \end{cases} \quad (49)$$

$$\begin{cases} u_{\infty} = \frac{A}{R^2} (y - y_0) \left[4 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] e^{-\frac{r^2}{2R^2}} \\ v_{\infty} = -\frac{A}{R^2} (x - x_0) \left[4 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] e^{-\frac{r^2}{2R^2}} \end{cases} \quad (50)$$

定义

$$\xi' = \nabla^2 \psi - \frac{g}{f_0} \Delta^2 z \quad (51)$$

为非地转风涡度, C-网格上的差分形式为

$$\xi'_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = \xi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{(z)} - \frac{g}{f_0} \frac{1}{d^2} (\nabla^2 z)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \quad (52)$$

其中,

$$\xi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{(z)} = (\bar{\xi}^{xy})_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} (\nabla^2 z)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = & z_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}} + z_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + z_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}} + z_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \\ & - 4z_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (54)$$

取 $R = 500 \text{ km}$, $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $H_0 = 5500 \text{ m}$, $A = 2.5 \times 10^6 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, 初始时刻沿 X 轴 (通过涡旋中心) 切向风速 v_0 和非地转风涡度 ξ'_0 的分布如图 3。

由图可见, 初始时刻, 其中心附近为一反气旋式涡旋, 距中心约 400 km 处出现最大风速约 10 ms^{-1} , 在半径 1000 km 以外转变为微弱的气旋式涡旋; 中心附近非地转风涡度为反气旋性涡度, 最大风速区以外是气旋性涡度。

正压适应过程是通过辐散辐合向地转平衡调整的。在非地转风为反气旋性涡度地区将出现流场的辐合, 使其中心位势升高, 而且散度场以波动的形式向四周传播。取空间步长 $d = 200 \text{ km}$, 积分区域为 32×32 格点, 即长和宽均为 6200 km ; 时间步长 $\Delta t = 6 \text{ min}$ 。图 4 表示用欧拉后差和向前向后方法计算结果的散度分布。由图可见, 涡旋中心的辐合是逐渐加强的, 而在气旋性涡度区域, 则出现辐散的加强。图 5 表示向前向后格式计算所得散度随时间的变化。 $t = 0.5 \text{ h}$, 中心辐合很强, $t = 1.0 \text{ h}$, 中心转为辐散; 可以明显看出散度场是向四周传播的; $t = 2.0 \text{ h}$ 后, 中心散度基本上恢复为零。图 6 是用 Matsuno 格式计算的结果, 基本特点与图 5 相似, 但重力惯性波的振幅要小很多。

图 7 为沿 X 轴位势场随时间的变化。初始时刻位势场水平 (图上未画出)。通过适应过程建立起高压中心。从图中可以看出, $t = 1 \text{ h}$, 中心位势最高, 而后又逐渐下降; $t = 3 \text{ h}$ 后, 中心维持一个高压, 强度变化很小。

图 8 为沿 X 轴 v (切向风速) 的分布情况。 $t = 1 \text{ h}$ 和 初始时刻比较, 最大风速略为减小。以后变化很小。用向前向后方法计算的结果风速稍大一些。适应过程前后中心风速变化不到 1 m/s 。

许多研究工作^[1, 3, 7]指出, 当扰动水平尺度 $L < L_0$, 位势场主要向流场调整。现在初始场 $L = R < L_0$, 故运动主要应向流场调整。图 9 是根据 (49)、(50) 式求得的适应过程终态沿 X 轴 Z_{∞} 和 v_{∞} 的分布。可以看出, 计算结果与解析解是很相似的。

前面的分析主要是 6 h 以前的计算结果。随着外推时间的延伸, 边界影响趋于明显,

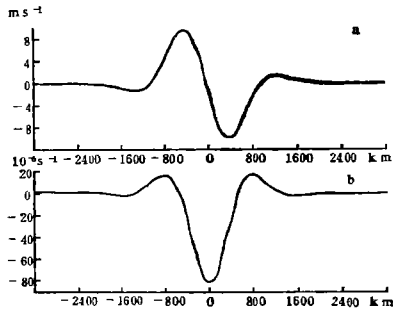


图 3 沿X轴切向风速 v_0 (a) 和非地转风涡度 ζ'_0 (b) 的分布

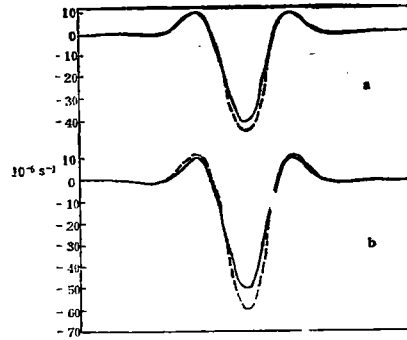


图 4 $t=0.2$ (a)、 0.3 (b)h 的散度分布 (实线：欧拉后差 虚线：向前向后)

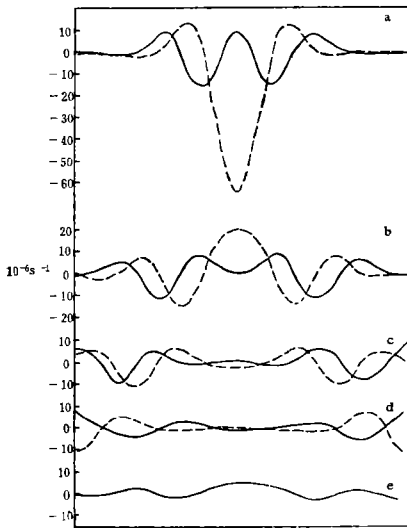


图 5 向前向后格式计算所得不同时刻的散度分布 (a, b, c, d, e 中虚线依次为 0.5, 1.5, 2.5, 4 h; 实线为 1, 2, 3, 5, 6 h)

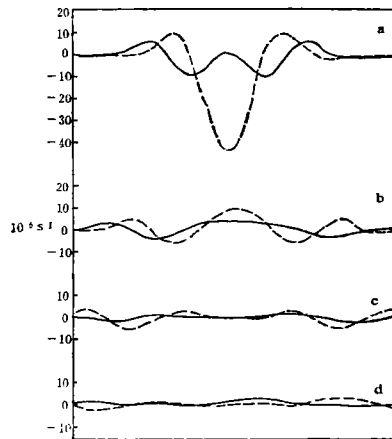


图 6 Matsuno 格式计算的散度分布 (a, b, c, d 中虚线依次为 0.5, 1.5, 2.5, 4 h; 实线为 1, 2, 3, 5 h)

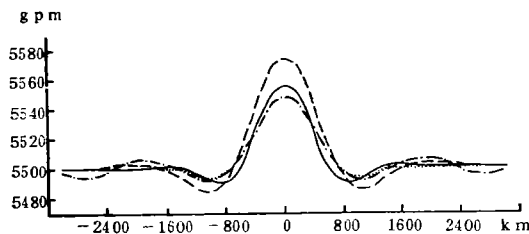


图 7 适应过程中位势场随时间的变化 (实线：0.5 h, 虚线：1 h, 点划线：3 h, 点线：6 h)

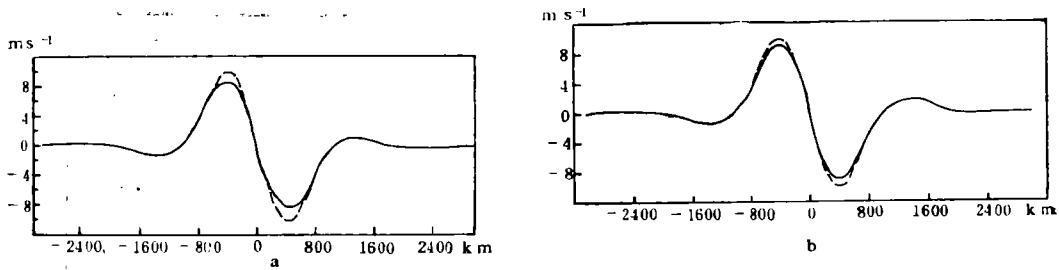


图 8 适应过程中 v 的分布
(a. 欧拉后差 b. 向前向后 虚线: 初始时刻 实线: $t=1$ h)

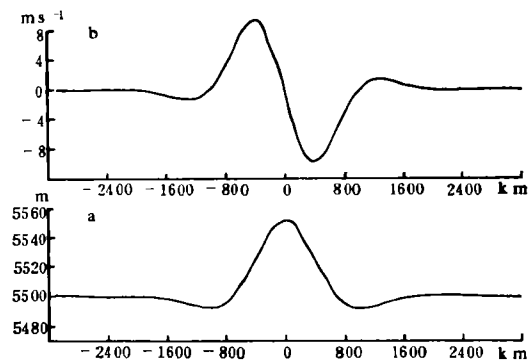


图 9 沿 X 轴自由面高度 Z_∞ (a), 切向风速 v_∞ (b) 的分布

不同的边界条件, 数值模拟呈现出不同的特点。

地转适应过程中, 扰动能量以重力惯性波的形式向无穷远处频散, 使地转平衡得以建立。但是数值模拟中, 只在有限区域内积分, 由此产生了积分边界问题。一般的数值模式中, 边界的处理方法大体有: 1. 固定边界; 2. 用粗网格大区域预报值内插; 3. 将内圈要素值赋给边界; 4. 海绵边界。这些方法虽较简单, 但却存在问题。在靠近流出边界处, 解是由内部解确定的, 人为地规定流出边界的要素值会破坏方程的适定性, 人为规定值与内部解确定值之差将作为地转风偏差在边界附近激发起强烈的重力惯性波, 传向区域内部。

为了避免边界区域虚假的重力惯性波引起的计算不稳定, 经常采用边界平滑的方法, 以阻尼重力波的能量。但更合理的方法是: 为了保持方程的适定性, 仅仅预先规定差分方程对应的线性系统所要求的某些边界值, 然后用适当的外推步骤计算其他要素。这就是所谓“自由传播边界”。Hack and Schubert (1981)^[13] 在台风数值模拟中采用了这种边界条件, 在柱坐标系中令

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} + \frac{c_n}{\sqrt{r}} \frac{\partial r V_n}{\partial n} = 0 \quad (55)$$

我们试验了不同的边界条件, 还比较了边界附近平滑与不平滑的结果。

海绵边界条件的具体做法是:

$$\phi_j^{(n)} = \phi_j^{(n-1)} + W_j \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_j \Delta t \quad (56)$$

W_j 为权重系数, 规定: $j=1, J$ 时, $W_j=0$; $j=2, J-1$ 时, $W_j=0.4$; $j=3, J-2$ 时, $W_j=0.7$; $j=4, J-3$ 时, $W_j=0.9$; $4 < j < J-3$ 时, $W_j=1.0$ 。

自由传播边界条件规定流出边界法向风速满足

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} + c_n \frac{\partial V_n}{\partial n} = 0 \quad (57)$$

并规定流入边界处切向风速不变。下面把它称为第五种边界条件。

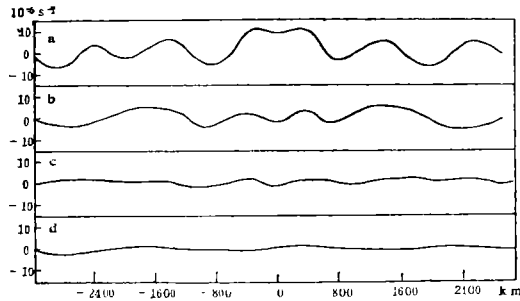


图 10 $t=12$ h 沿 x 轴散度的分布

图 10 为几种不同边界条件在 $t=12$ h 散度场的计算结果。a 为第一种边界条件的结果, 由于强烈的边界反射, 随着时间的增长, 散度场不趋于零; 第二种边界条件未采用; 第三种边界条件计算结果与第一种相似(图略); b 为第四种边界条件的计算结果, $t=12$ h, 散度只比(a)稍小, 仍有相当强度; c 为第四种边界条件并每步在边界内第一圈加五点平滑的计算结果, $t=12$ h, 散度显著减小; d 为第五种边界条件计算结果, 散度比 c 更小。

从上面结果可以看出, 要模拟重力惯性波向远处的频散, 最好采用自由传播边界, 或用海绵边界加内圈平滑的方法。

六、小 结

1. 我们根据 c-网格给出适应过程的差分格式, 并证明了, 微分方程所具有的能量、位涡守恒特性, 在空间差分格式中均能满足。

2. 讨论了时间积分的欧拉后差格式和向前向后格式的频散特性, 提出一种改进的向前向后时间积分方法, 其重力惯性波的差分解是中性稳定的。

3. 通过一个适应过程实例计算说明, 采用欧拉后差和向前向后时间积分方法模拟地转风适应过程是比较有效的。两种方法计算所得的调整结果差别不大, 但最初时刻重力惯性波的变化和振幅却有明显差别, 用向前向后方法计算的振幅大于欧拉后差的计算结果。

4. 考察了侧向边界条件对重力惯性波传播的影响。计算结果表明, 采用自由传播边界条件可以较好地模拟重力惯性波向远处频散的特性。

参 考 文 献

- [1] 陈秋士, 简单斜压大气中热成风的建立和破坏(一)、(二), 气象学报, 33, 1, 2期, 51—63, 153—162, 1963.
- [2] Marchuk, Short term weather prediction by splitting of the complete hydrodynamic equations, Proc WMO/IUGG, Symp. Num. Wea. Pred., Tokyo, II, 1—8, 1968.
- [3] 陈秋士, 分析天气形势变化物理过程的一种显式分解计算方法, 第二次全国数值天气预报会议论文集, 271—282, 科学出版社, 1980.
- [4] Gadd, A. J., A split explicit integration scheme for numerical weather prediction, *Q. J. R. M. S.*, 104, 569—582, 1978.
- [5] Кибель, И. А., О приспособлении движения воздуха к геострофическому. ДАН СССР, Т. 104, No. 5, 60—63, 1955.
- [6] Монин, А. С., Изменения давления в бароклинной атмосфере, Изв. АН СССР. Сер. Геофиз., No. 4, 497—514, 1958.
- [7] 曾庆存, 大气中的适应过程和发展过程(一)、(二), 气象学报, 34卷, 2, 3期, 163—174, 281—259, 1963.
- [8] 陈秋士、励铭德, 四层模式热成风适应, 气象学报, 34卷, 3期, 253—270, 1964.
- [9] Winninghoff, F. L., On the adjustment toward a geostrophic balance in a simple primitive equation model with application to the problems of initialization and objective analysis, Ph. D. thesis, Dept. of Meteorology, Univ. of Calif. Los Angeles, 161 pp, 1968.
- [10] Arakawa, A., and V. R. Lamb, Computational design of the basic dynamical process of the UCLA general circulation model, *Methods in Comput. Physics*, Vol.17, 173—265, Academic Press, 1977.
- [11] 陈秋士、卢咸池, 一个考虑地形影响的浅水模式的显式分解方法及其试验, 1983 (未发表).
- [12] Обухов, А. М., К вопросу о геострофическом ветре. Изв. АН СССР Сер. Геогр. и Геофиз., 13, 281—306, 1949.
- [13] Hack and Schubert, Lateral boundary conditions for the tropical cyclone models, *M. W. R.*, 109, 1404—1420, 1981.

A NUMERICAL SIMULATION OF THE GEOSTROPHIC ADJUSTMENT PROCESS

Chen Qiushi Lu Xianchi Wang Heng

(Department of Geophysics, Peking University)

Abstract

In this paper, a numerical simulation of the geostrophic adjustment process with a C-grid network is illustrated. A difference scheme which has the energy and potential vorticity conserving relation consistent with the differential equations is given, and the effect of some time difference schemes on dispersion of the gravity-inertia wave is discussed. An improved forward-backward time integration scheme is proposed for keeping the computational stability. The effect of various boundary conditions for a finite region model on the gravity-inertia wave is shown by some calculated results.