

## 降水的振荡机理\*

林杏奇

(湖北省气象科学研究所)

在物理、化学、气象等广泛领域中,为了研究系统的演化,把研究系统抽象成为一组变量和包含一些控制参数的速率方程组(演化方程),再加上边界条件。由这个模式出发对定态解进行线性稳定性分析,应用分支理论我们可以严格断定在参数空间中定态的稳定区域以及出现分支的线,还可以近似计算分支的解析表达式,也就是各种耗散结构表现出来的许多新现象。

自然界从化学到物理的各个领域中,普遍存在着自组织现象。如果我们从广义的、形式的意义上来理解“化学反应”,则在社会和生态学或生物学的领域中,我们将遇到自组织现象的相似方程式,都可以用一组耦合的非线性偏微分方程组来表示。例如生态学上捕食者与被捕食者之间的竞争,用洛特卡振荡反应的动力学模型,导出了这种自组织现象的周期运动,很好地描述了生态平衡的振荡规律。又如,在振荡化学反应中,当控制参数超过某一临界值时,时空上出现自组织图案,用三分子理论模型很好地描述了化学反应中出现的这种振荡规律。三分子理论模型的建立,推动了非平衡相变理论的重大发展。

大气运动中发生的非平衡相变,也是一种自组织现象,形式上与生态平衡中捕食者与被捕食者之间的振荡非常类似。

本文用耗散结构理论建立了降水的振荡模型,研究了降水的振荡机理,指出了控制降水振动的因子,为预报降水振荡提供了物理依据。

### 1. 降水的振荡模型

云体是个开放系统,它是由小水滴和大水滴或冰晶组成的。外界不断流入该系统的水汽在上升运动中不断被凝结成小水滴,使云体内小水滴的数量不断增多。与此同时,大水滴则通过大、小水滴共存发生的扩散转移和大水滴碰并小水滴以及振动破裂等方式,数量在不断增多,大水滴“捕捉吞食”小水滴的结果,使云体内小水滴的数量减少,此外,云体内上升气流的振荡衰减,使一部分大水滴离开云体落至地面,致使云体中大水滴数量减少,云体内大小水滴含量这种消长的振荡,致使降水出现明显的振荡。

根据成云致雨的物理过程,我们可以写出这些过程的反应式:



式中  $A$  为流入系统水汽的净流入量,  $X$  为云体内的小水滴数量,  $Y$  为大水滴数量,  $E$  为离开云体下落的

\* 本文于1984年6月18日收到,1985年1月21日收到最后修改稿。

大水滴数量,  $k_1$  为水汽相变为水的速率,  $k_2$  为大水滴数量增加的速率,  $k_3$  为大水滴离开云体的速率。第一个反应式表示水汽净入流量凝结成云滴、使云中小水滴数量增加的过程; 第二个反应式表示大水滴数量增加, 小水滴数量减少的过程; 第三个反应式表示一部分大水滴在上升气流托不住时离开云体降落至地面的过程。综观上述反应式可知, 成云致雨过程是由三个不可逆过程耦合作用而形成的。假定流入系统内部水汽净入流量  $A$  维持恒定, 由 (1) 式可以得出大小水滴含量随时间演化的速率方程,

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial t} &= k_1 A - k_2 XY \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= k_2 XY - k_3 Y\end{aligned}\quad (2)$$

由 (2) 式可求得微分方程的定态解为:

$$X_0 = \frac{k_3}{k_2} \quad Y_0 = \frac{k_1 A}{k_2 X}$$

现在对定态  $(X_0, Y_0)$  进行线性稳定性分析, 我们把  $(X_0, Y_0)$  看作是一个未被扰动的解, 当它受到外界作用或内部涨落而引起的连续扰动为:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 + x(t) \\ Y_0 + y(t) \end{pmatrix}\quad (3)$$

从 (2)、(3) 式作线性近似得相应的线性化方程组:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\quad (4)$$

(4) 式的本征值方程为:

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} L_{11} - w & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} - w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0\quad (6)$$

方程组有非平庸解的条件是系数矩阵的行列式等于零, 即

$$\begin{vmatrix} L_{11} - w & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} - w \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{或 } W^2 - TW + \Delta = 0\quad (7)$$

$$\text{由 (7) 式得 } W^{\pm} = \frac{1}{2}(T \pm \sqrt{T^2 - 4\Delta})\quad (8)$$

定态解的稳定性由特征值  $W$  决定。

$$(8) \text{ 式中 } T = L_{11} + L_{22} = \frac{-k_1 A}{X}, \Delta = L_{11} L_{22} - L_{12} L_{21} = \frac{k_1 k_3 A}{X}$$

$$\text{故: } W^{\pm} = \frac{-k_1 A}{2X} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2 - 4 \frac{k_1 k_3 A}{X}}\quad (9)$$

由于  $T = \frac{-k_1 A}{X} < 0$  (因  $k_1 > 0, A > 0, X > 0$ ) 和  $\Delta = \frac{k_1 k_3 A}{X} > 0$  ( $k_1 > 0, k_3 > 0, A > 0, X > 0$ )。

下面分两种情况讨论定态解的稳定性:

(1) 当  $T^2 - 4\Delta > 0$ , 即  $\left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2 - \frac{4 k_1 k_3 A}{X} > 0$  时, 很容易看出特征值  $W^{\pm}$  均小于零, 定态点  $(X_0 =$

$\frac{k_3}{k_2}, Y_0 = \frac{k_1 A}{k_2 X})$  为稳定的结点, 扰动不会出现周期振动。

(2) 当  $T^2 - 4\Delta < 0$ , 即  $\left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2 - \frac{4 k_1 k_3 A}{X} < 0$  时,

$$\begin{aligned}
 W^{\pm} &= \frac{-k_1 A}{X} \pm \sqrt{\left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2 - 4 \frac{k_1 k_3 A}{X}} = \frac{-k_1 A}{X} \pm \sqrt{-\left[4 \frac{k_1 k_3 A}{X} - \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2\right]} \\
 &= \frac{-k_1 A}{X} \pm \sqrt{\frac{4 k_1 k_3 A}{X} - \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2} i
 \end{aligned} \quad (10)$$

特征值  $W^{\pm}$  均为复根, 定态点  $(X_0 = \frac{k_3}{k_2}, Y_0 = \frac{k_1 A}{k_2 X})$  是个稳定焦点, 定态点附近的扰动是周期性的减幅振动。由(10)式我们可以得出线性化方程组(4)式的解为:

$$\begin{aligned}
 x &= c_1 e^{w_1 t} + c_2 e^{w_2 t} = c_1 e^{\left[ \frac{-k_1 A}{X} + \sqrt{\frac{4 k_1 k_3 A}{X} - \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2} i \right] t} \\
 &\quad + c_2 e^{\left[ \frac{-k_1 A}{X} - \sqrt{\frac{4 k_1 k_3 A}{X} - \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2} i \right] t} \\
 &= c_1 e^{\frac{-k_1 A}{2X} t} \cdot e^{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 k_1 k_3 A}{X} - \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2} \cdot t i} + c_2 e^{\frac{-k_1 A}{2X} t} \cdot e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 k_1 k_3 A}{X} - \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2} \cdot t i} \\
 y &= C_1 D_1 e^{w_1 t} + C_2 D_2 e^{w_2 t}
 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 &= C_1 D_1 e^{\frac{-k_1 A}{2X} t} \cdot e^{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 k_1 k_3 A}{X} - \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2} t i} \\
 &\quad + C_2 D_2 e^{\frac{-k_1 A}{2X} t} \cdot e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 k_1 k_3 A}{X} - \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2} t i}
 \end{aligned}$$

其中  $C_1, C_2$  由初始条件决定, 系数  $D_1, D_2$  有时称为分布函数, 它们是方程:

$$L_{11} D^2 + (L_{11} - L_{22}) D - L_{21} = 0 \text{ 的根。}$$

为了讨论解的周期性, 引用欧拉公式:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

则(11)式变为

$$\begin{aligned}
 x &= c_1 e^{\frac{-k_1 A}{2X} t} \left( \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 k_1 k_3 A}{X} - \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2} t + i \sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 k_1 k_3 A}{X} - \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2} t \right) \\
 &\quad + c_2 e^{\frac{-k_1 A}{2X} t} \left( \cos -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 k_1 k_3 A}{X} - \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2} t + i \sin -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 k_1 k_3 A}{X} - \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2} t \right) \\
 y &= C_1 D_1 e^{\frac{-k_1 A}{2X} t} \left( \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 k_1 k_3 A}{X} - \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2} t + i \sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 k_1 k_3 A}{X} - \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2} t \right) \quad (12) \\
 &\quad + C_2 D_2 e^{\frac{-k_1 A}{2X} t} \left( \cos -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 k_1 k_3 A}{X} - \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2} t + i \sin -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 k_1 k_3 A}{X} - \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2} t \right)
 \end{aligned}$$

取(12)式复数的实部得:

$$x = c_1 e^{\frac{-k_1 A}{2X} t} \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4k_1 k_3 A}{X} - \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2} t + c_2 e^{\frac{-k_1 A}{2X} t} \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4k_1 k_3 A}{X} - \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2} t$$

$$= (c_1 + c_2) e^{\frac{-k_1 A}{2X} t} \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4k_1 k_3 A}{X} - \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2} t \quad (13)$$

$$y = C_1 D_1 e^{\frac{-k_1 A}{2X} t} \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4k_1 k_3 A}{X} - \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2} t +$$

$$+ C_2 D_2 e^{\frac{-k_1 A_1}{2X} t} \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4k_1 k_3 A}{X} - \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2} t$$

$$= (C_1 D_1 + C_2 D_2) e^{\frac{-k_1 A}{2X} t} \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4k_1 k_3 A}{X} - \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2} t$$

(13)式就是云中大小水滴含量随时间绕定态( $X_0, Y_0$ )的振荡方程。

方程右端 $(C_1 + C_2) e^{\frac{-k_1 A}{2X} t}$ 和 $(C_1 D_1 + C_2 D_2) e^{\frac{-k_1 A}{2X} t}$ 为振动的振幅,  $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4k_1 k_3 A}{X} - \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2}$ 为振动的圆频率。显见云中大小水滴含量是具有同频率(同周期)不同振幅的振动。小水滴含量和大水滴含量的振动强度分别决定于振幅 $(C_1 + C_2) e^{\frac{-k_1 A}{2X} t}$ 和 $(C_1 D_1 + C_2 D_2) e^{\frac{-k_1 A}{2X} t}$ 的大小。当振幅大时, 大小水滴含量围绕定态的振动就大, 降水强度变化就比较激烈。大小水滴含量的振荡周期的长短, 决定于圆频率 $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4k_1 k_3 A}{X} - \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2}$ 的大小, 当圆频率大时, 大小水滴含量振荡周期缩短, 致使降水振动频繁。

这种振动的物理意义是: 当云中小水滴含量较大时, 如 $X$ 较大,  $Y$ 较小( $X > X_0, Y < Y_0$ ) 通过云-雨转化过程 $k_1 XY$ ,  $X$ 减少,  $Y$ 增加。由于 $k_1 Y$ 的迅速增大,  $Y$ 趋于减少,  $k_2 XY$ 减少,  $X$ 增大, 又使 $k_1 XY$ 增大而 $Y$ 增大。

由于 $T^2 - 4\Delta = \left(\frac{-k_1 A}{X}\right)^2 - \frac{4k_1 k_3 A}{X} = \frac{k_1 A}{X} \left(\frac{k_1 A}{X} - 4k_3\right)$ , 其中 $\frac{k_1 A}{X} > 0$ , 故当 $X > \frac{k_1 A}{4k_3}$ 时,  $T^2 - 4\Delta < 0$  扰动就会有周期振动。这表明由于初始雨滴形成的困难, 云在发展初期往往积累了一定的云滴(即 $X$ 较大), 待雨滴产生后, 才会出现这种振动。由于 $k_1 A$ 为水汽凝结率, 同风速正相关,  $k_3$ 为雨滴落出率, 同风速负相关, 所以在风速小的层状云中, 容易产生这种振动( $X$ 阈值较小)。在暖性层云中, 动力过程为定常, 这种微物理过程的振动, 可能造成层云持续降水的一些阵性。

## 2. 结 论

通过大小水滴含量振荡方程的分析, 得出以下结果:

1. 当 $T^2 - 4\Delta < 0$ , 即 $X > \frac{k_1 A}{4k_3}$ 时, 云中大小水滴含量会发生周期振荡。
2. 控制降水振荡的因素有初始条件 $C_1, C_2$ , 分布系数 $D_1, D_2$ , 流入系统的水汽净入流量 $A$ , 水汽相变

成水的速率  $k_1$ ; 大水滴离开云体的速率  $k_2$ ; 云中小水滴数量  $X$  等。

3. 降水振荡周期的长短由流入系统的水汽净入流量  $A$ 、水汽相变成水的速率  $k_1$ 、大水滴离开云体的速率  $k_2$  和云中小水滴数量  $X$  所决定。

4. 降水强度振动大小由初始条件  $C_1, C_2$ , 分布系数  $D_1, D_2$ , 流入系统水汽净入流量  $A$ , 水汽相变为水的速率  $k_1$  及云中小水滴数量  $X$  所决定。

### 参 考 文 献

- [1] 李湘如编, Prigogine 耗散结构理论, 江西师范学院, 1980年9月。
- [2] 林杏奇, 惯性运动分岔与暴雨发生, 湖北省气象科学研究所印, 1984年9月。
- [3] 林杏奇, 质量变化与暴雨发生和演化, 湖北省气象科学研究所印, 1983年10月。
- [4] 刘式达、刘式适, 大气中对流的分岔和突变, 力学学报第一期, 1984年。
- [5] 福里斯等著, 普通物理学, 高等教育出版社。