第41卷 第1期　　气 象 学 报　　Vol. 41, No. 1
1983年2月　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　Feb., 1983

长期预报模式的随机解*

李 天 尚

（黑龙江省松花江地区气象局）

提　　要

把地球-大气系统，近似地看作是具有随机干扰的对太阳辐射线性响应的系统，求得了一个随机解。证明了大气运动的长期状态是许多时刻无数随机因素影响的迭加。

一、地-气系统的合理近似

地球-大气这个控制系统，本质上是一个非线性响应系统。因此，精确地描述是十分困难的。我们应当寻找一个接近于实际的描述方法。

我们知道，任何一个（长期的）大气状态，几乎都是在平均值上下作微小的振动，而且这个平均值都是以年为周期，各种小振动的各种周期的振幅，与这个年振幅比较都是很小的。因此，作为一级近似，可以把地气系统作为对太阳辐射的线性响应系统。在某些情况中，例如，对于北半球地面气温、500 mb 高度场及温度场等，这还是一个很好的近似[1]。然而总的说来，这是一个粗糙的近似。在这样的近似中，各种大气状态都仅仅具有一个年变化周期。这对于长期天气的描述显然是不够的。从任何一个地方的气温年变化曲线可以看出，很接近于一个正弦曲线上迭加一个小扰动。根据经验，我们知道这个迭加上去的小扰动具有随机的性质。所以作为二级近似，可以认为，地气系统是一个迭加有随机扰动的线性响应系统。

二、描述地气系统的基本方程

1. 基本方程组

根据上面的分析，我们可以用小扰动方法把描述大气运动的基本方程线性化。譬如说：我们可以得到一个线性、无量纲、非绝热、准地转涡度距平方程[2]：

$$\varepsilon\frac{\partial\Delta\phi'}{\partial t}+\widetilde{U}\frac{\partial\Delta\phi'}{\partial x}+\widetilde{F}\Delta\phi'+\frac{\partial\phi'}{\partial x}=T'_{s0} \tag{1}$$

地表温度的热传导方程：

$$\frac{\partial^2 T'_s}{\partial z^2}=\mu\frac{\partial T'_s}{\partial t} \tag{2}$$

* 本文于1979年10月12日收到，1982年1月13日收到修改稿。

$$\left(\frac{\partial T'_s}{\partial z}+\lambda_Q T'_s\right)\Big|_{z=0}=-\lambda_s\Delta\phi' \tag{3}$$

$$T'_s\,|_{z=-\infty}=0 \tag{4}$$

其中各符号意义见[2]

在一个海气联合系统中，当给定一个初始扰动后，经过适当近似，在文献[2]中已得到了当时间适当长后海温场和运动场的解的表达式

$$T'_{s0}\simeq v=\frac{\sqrt{\mu}}{\lambda_s}\int_{-\infty}^{x}T'^{\circ}_s(x')\cdot e^{-\frac{\lambda_Q}{\lambda_s}(x'-x)}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{\mu(x'-x)^2}{4\lambda_s^2 t}}dx'+$$

$$+\frac{\sqrt{\mu}}{\lambda_s}\int_{x}^{\infty}\int_{0}^{t}T'^{\circ}_{s0}(x')\cdot e^{-\frac{\lambda_Q}{\lambda_s}(x'-x)}J_0\left(2\sqrt{\frac{(x'-x)(t-t')}{\varepsilon}}\right)\cdot\frac{1}{2t'}\cdot$$

$$\cdot x\left(\frac{\sqrt{\mu}(x'-x)}{\lambda_s},t'\right)\cdot\left(\frac{\mu(x'-x)^2}{2\lambda_s^2 t'}-1\right)dt'dx' \tag{5}$$

我们现在对上述方程组进行修改，即考虑到随机因素对方程的影响。

作为地-气系统输入的太阳辐射是一个周期变量，而且太阳常数基本上是一个常数，那么在一个线性响应系统中，初始的扰动是怎么出现的呢？我们知道“大气的一个显著特点是发生在大气中的各种运动具有不规则的乱流性”[3]。大气中存在着各种空间和时间尺度的乱流。因此，任何一种尺度的大气运动都会受到许多随机因素的影响。由此可见，几乎所有对大气运动进行描述的方程都要受到随机的干扰而出现偏差。我们所列的方程组(1)—(4)也不会例外，都要有偏差。为了简单起见，我们仅考虑其中的一个有偏差的情况。即在方程(3)中存在偏差，并假定出现在右端。把偏差记为 $R(v)$。这一项的意义是运动场对大范围云量的影响（从而也是对下垫面接受到的辐射量的影响）具有随机的性质。$R(v)$是随机函数，与运动场有关，即：

$$R(v)=R[v(x、y、t)]=Q(x、y、t) \tag{6}$$

为了避免计算的复杂，假定 Q 只与 t 有关，即：

$$Q=Q(t)$$

根据随机函数理论[4] $Q(t)$总可以表示成下列形式：

$$Q(t)=m_Q(t)+\int_{\Lambda}V(\lambda)q(t,\lambda)d\lambda \tag{7}$$

其中，$m_Q(t)$为随机函数的数学期望。$V(\lambda)$为参量是 λ 的白噪声，$q(t,\lambda)$ 为一非随机函数，Λ 为 λ 的积分区域。假定随机干扰的数学期望 $m_Q(t)$及相关函数 $R(t_1、t_2)$ 为已知，把 $Q(t)$的表示式(7)代入(3)式中，为了简单起见；考虑一维情况，令$\tilde{U}=\tilde{F}=0$，$\frac{\partial\phi'}{\partial x}=v$，则方程组(1)—(4)成如下形式：

$$\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x}+v=T'_{s0} \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 T'_s}{\partial z^2}=\mu\frac{\partial T'_s}{\partial t} \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial T'_s}{\partial z}+\lambda_Q T'_s\right)\bigg|_{z=0}=-\lambda_s\frac{\partial v}{\partial x}+Q(t) \tag{10}$$

$$T'_s\big|_{z=-\infty}=0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{t=0}=\zeta^\circ \tag{12}$$

$$T'_s\big|_{t=0}=T'^\circ_s \tag{13}$$

2．基本方程组的解及解的渐近性态

现在我们来求解方程组(8)—(13)，注意到当 $\varepsilon=0$ 时 $T'_{s0}=v$，因此，对长期天气过程取近似

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial T'_{s0}}{\partial x}-\varepsilon\frac{\partial^3 T'_{s0}}{\partial t\partial x^2} \tag{14}$$

把(14)代入(10)式，方程组的解为(具体解法参看附录)

$$T'_{s0}\simeq v=\frac{\sqrt{\mu}}{\lambda_s}\int_{-\infty}^{x}T'^\circ_{s0}(x')\cdot e^{-\frac{\lambda_Q}{\lambda_s}(x'-x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{\mu(x'-x)^2}{4\lambda_s^2 t}}dx'+$$

$$+\frac{\sqrt{\mu}}{\lambda_s}\int_{x}^{\infty}\int_0^t T'^\circ_s(x')\cdot e^{-\frac{\lambda_Q}{\lambda_s}(x'-x)}J_0\left(2\sqrt{\frac{(x'-x)(t-t')}{\varepsilon}}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{2t'}\cdot\chi\left(\frac{\sqrt{\mu}\,(x'-x)}{\lambda_s},t'\right)\cdot\left(\frac{\frac{\mu(x'-x)^2}{\lambda_s^2}}{2t'}-1\right)dt'dx'-$$

$$-\varepsilon\int_{-\infty}^{x}\zeta^\circ(x')\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(e^{-\frac{\lambda_Q}{\lambda_s}\alpha}\cdot\Psi\left(\frac{\sqrt{\mu}\,\alpha}{\lambda_s},t\right)\right)\right]\bigg|_{\alpha=x'-x}dx'+$$

$$+\int_x^\infty\int_0^t\frac{\partial}{\partial\beta}e^{-\frac{\lambda_Q}{\lambda_s}\beta}J_0\left(2\sqrt{\frac{\beta(t-t')}{\varepsilon}}\right)\cdot\left(\frac{\mu\beta^2}{2\lambda_s^2 t'}-3\right)\cdot\frac{1}{4t'^2}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\frac{\mu\beta^2}{\lambda_s^2}}\cdot\chi\left(\frac{\sqrt{\mu}\,\beta}{\lambda_s},t'\right)\bigg|_{\beta=x'-x}dt'dx'+$$

$$+\frac{1}{\lambda_s}\int_{-\infty}^{x}\int_0^t m_Q(t-t')\cdot e^{-\frac{\lambda_Q}{\lambda_s}(x'-x)}\Psi\left(\frac{\sqrt{\mu}\,(x'-x)}{\lambda_s},t'\right)dt'dx'+$$

$$+\frac{1}{\lambda_s}\int_x^\infty\int_0^t\int_0^{t'}m_Q(t-t')\cdot e^{-\frac{\lambda_Q}{\lambda_s}(x'-x)}\cdot J_0\left(2\sqrt{\frac{(x'-x)(t'-t'')}{\varepsilon}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{\mu(x'-x)^2}{\lambda_s^2}}{2t''}-3\right)\cdot$$

$$\frac{\frac{\sqrt{\mu}\,(x'-x)}{\lambda_s}}{4\sqrt{t''^5\pi}}\cdot e^{-\frac{\mu(x'-x)^2}{4\lambda_s^2 t''}}dt''dt'dx'+$$

$$+\frac{1}{\lambda_s}\int_x^\infty\int_0^t\int_0^{t'}\int_\Lambda V(\lambda)\cdot q[(t-t'),\lambda]\cdot e^{-\frac{\lambda_Q}{\lambda_s}(x'-x)}\cdot J_0\left(2\sqrt{\frac{(x'-x)(t'-t'')}{\varepsilon}}\right)\cdot$$

$$\left(\frac{\frac{\mu(x'-x)^2}{\lambda_s^2}}{2t''}-3\right)\cdot\frac{\frac{\sqrt{\mu}(x'-x)}{\lambda_s}}{4\sqrt{t''^5\pi}}\cdot e^{-\frac{\mu(x'-x)^2}{4\lambda_s^2 t''}}d\lambda dt''dt'dx'+$$

$$+\frac{1}{\lambda_s}\int_{-\infty}^{x}\int_0^t\int_\Lambda V(\lambda)\cdot q[(t-t'),\lambda]\cdot e^{-\frac{\lambda_Q}{\lambda_s}(x'-x)}\cdot\Psi\left(\frac{\sqrt{\mu}(x'-x)}{\lambda_s},t'\right)d\lambda dt'dx' \tag{15}$$

其中
$$\Psi(a,t)=\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}\cdot e^{-\frac{a^2}{4t}},\chi(a,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{a^2}{4t}}$$

由(15)式，可以看到，如果不存在最后两项，则方程的解是确定性的；由于最后两项的存在，使方程的解变成了随机函数。

我们知道，方程第一项至第四项随时间分别呈$O(t^{-\frac{1}{2}})$，$O(t^{-\frac{3}{4}})$，$O(t^{-\frac{3}{2}})$，$O(t^{-\frac{5}{4}})$ 衰减。所以当时间充分长之后，这四项均趋于 0，即

$$\lim_{t\to\infty}T'_{s_0}(t)=\frac{1}{\lambda_s}\int_{-\infty}^{x}\int_0^t m_Q(t-t').e^{-\frac{\lambda_Q}{\lambda_s}(x'-x)}\cdot\Psi\left(\frac{\sqrt{\mu}(x'-x)}{\lambda_s},t'\right)dt'dx'+$$

$$+\frac{1}{\lambda_s}\int_x^\infty\int_0^t\int_0^{t'}m_Q(t-t')\cdot e^{-\frac{\lambda_Q}{\lambda_s}(x'-x)}\cdot J_0\left(2\sqrt{\frac{(x'-x)(t'-t'')}{\varepsilon}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{\mu(x'-x)^2}{\lambda_s^2}}{2t''}-3\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{\frac{\sqrt{\mu}(x'-x)}{\lambda_s}}{4\sqrt{t''^5\pi}}\cdot e^{-\frac{\mu(x'-x)^2}{4\lambda_s^2 t''}}dt''dt'dx'+$$

$$+\frac{1}{\lambda_s}\int_x^\infty\int_0^t\int_0^{t'}\int_\Lambda V(\lambda)\cdot q[(t-t'),\lambda]\cdot e^{-\frac{\lambda_Q}{\lambda_s}(x'-x)}\cdot J_0\left(2\sqrt{\frac{(x'-x)(t'-t'')}{\varepsilon}}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\frac{\mu(x'-x)^2}{\lambda_s^2}}{2t''}-3\right)\cdot\frac{\frac{\sqrt{\mu}(x'-x)}{\lambda_s}}{4\sqrt{t''^5\pi}}\cdot e^{-\frac{\mu(x'-x)^2}{4\lambda_s^2 t''}}d\lambda dt''dt'dx'+$$

$$+\frac{1}{\lambda_s}\int_{-\infty}^{x}\int_0^t\int_\Lambda V(\lambda)\cdot q[(t-t'),\lambda]\cdot e^{-\frac{\lambda_Q}{\lambda_s}(x'-x)}\cdot\Psi\left(\frac{\sqrt{\mu}(x'-x)}{\lambda_s},t'\right)d\lambda dt'dx' \tag{16}$$

也就是说，具有随机干扰的这个线性系统，当时间充分长之后，系统的状态与初始场无关。我们以后只讨论当时间充分长之后系统的状态，即只讨论(16)式，并把极限号省略。

3．渐近性态随机解的性质及统计结构

我们省略(16)式的极限符号，并作些整理，令

$$G(x,t')=\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{-\lambda_Q}{\lambda_s}(x'-x)}\Psi\left(\frac{\sqrt{\mu}(x'-x)}{\lambda_s},t'\right)dx'$$

$$H(x,t')=\int_x^{\infty}e^{\frac{-\lambda_Q}{\lambda_s}(x'-x)}\int_0^{t'}J_0\left(2\sqrt{\frac{(x'-x)(t'-t'')}{\varepsilon}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{\mu(x'-x)^2}{\lambda_s^2}}{2t''}-3\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{\frac{\sqrt{\mu}(x'-x)}{\lambda_s}}{4\sqrt{t''^5\pi}}e^{-\frac{\mu(x'-x)^2}{4\lambda_s^2t''}}dt''dx'$$

则：

$$T'_{s0}(t)=\int_0^t\left[m_Q(t-t')+\int_\Lambda V(\lambda)\cdot q(t-t',\lambda)d\lambda\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{\lambda_s}G(x,t')+\frac{1}{\lambda_s}H(x,t')\right]dt' \qquad (17)$$

(17)式第二个中括号的三项（H 中包含二项）对 t' 分别呈 $O(t'^{-\frac{3}{2}})$，$O(t'^{-3})$，$O(t'^{-2})$ 衰减。即 t 时刻之前充分远处，对 t 时刻的影响很小，可忽略。假定这个时间长度为 $n\Delta t$，即 $(t-n\Delta t)$ 时刻之前对 t 时刻的影响可忽略。我们把(17)式写成求和形式，忽略 $(t-n\Delta t)$ 之前部分，则(17)式可写成：

$$T'_{s0}(t)=\sum_{i=0}^{n}\left\{\left(m_Q(t-i\Delta t)+\int_\Lambda V(\lambda)q[t-i\Delta t,\lambda]d\lambda\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{1}{\lambda_s}G(x,i\Delta t)+\frac{1}{\lambda_s}H(x,i\Delta t)\right)\right\}\Delta t \qquad (18)$$

(18)式各项为随机函数与确定性函数之积仍为随机函数。

式中 $m_Q(t-i\Delta t)+\int_\Lambda V(\lambda)q(t-i\Delta t)d\lambda$ 为 $t-i\Delta t$ 时刻大气受到的随机干扰。(18)式表明，t 时刻的海温场（或运动场）是 t 时刻之前各时刻随机干扰的加权和，也就是说，t 时刻的海温场是许多时刻随机干扰的总效果。

这个随机解的数学期望为

$$M[T_{s0}']=\int_0^t m_Q(t-t')\cdot\left(\frac{1}{\lambda_s}G(x,t')+\frac{1}{\lambda_s}H(x,t')\right)dt' \qquad (19)$$

由(19)式可知，海温场（或运动场）的平均值是各时刻随机干扰平均值的加权和，而且还可以看到，即使随机干扰是平稳的，即 $m_Q(t)=$常数，海温场（或运动场）也不再是平稳的了，这时 $M[T'_{s0}(t)]$ 是 t 的函数。

随机解的自相关函数为

$$RT'_{s0}(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}R_Q(t_1-t_1',t_2-t_2')\cdot\left(\frac{1}{\lambda_s}G(x_1,t_1')+\frac{1}{\lambda_s}H(x_1,t_1')\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{\lambda_s}G(x_1,t_2')+\frac{1}{\lambda_s}H(x_1,t_2')\right)dt_1'dt_2' \qquad (20)$$

其中 R_Q 为随机干扰的自相关函数

方差为：

$$DT'_{s0}(t)=\int_0^t\int_0^t R_Q(t-t'_1,t-t'_2)\cdot\left(\frac{1}{\lambda_s}G(x,t'_1)+\frac{1}{\lambda_s}H(x,t'_1)\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{1}{\lambda_s}G(x,t'_2)+\frac{1}{\lambda_s}H(x,t'_2)\right)dt'_1dt'_2 \tag{21}$$

把(21)式写成求和的形式

$$DT'_{s0}(t)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}R_Q(t-i\Delta t,t-j\Delta t)\cdot\left(\frac{1}{\lambda_s}G(x,i\Delta t)+\frac{1}{\lambda_s}H(x,i\Delta t)\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{1}{\lambda_s}G(x,j\Delta t)+\frac{1}{\lambda_s}H(x,j\Delta t)\right)\Delta t^2 \tag{22}$$

由(22)式可知，随机场的方差是各时刻随机干扰的自相关函数的加权和。权重随距离 t 的时刻 t'_1 和 t'_2 衰减，衰减最慢部分呈 $O[(t_1'^{\frac{3}{2}})\cdot(t_2'^{-\frac{3}{2}})]$性态。

综上所述，我们可以得到几点结论：

1）把地-气系统近似地看作是具有随机干扰的对太阳辐射的线性响应系统，则这个系统的状态将变成随机场，而且这个状态是许多时刻随机干扰的迭加。只要时间足够长，初始场的影响可以忽略。

2）这个随机场的方差是各时刻相关函数的加权和。也就是许多时刻随机干扰的方差及相关函数都对它有贡献。

3）距离 t 时刻之前足够远处的随机干扰的影响可以忽略。

三、讨　论

1）宏观上，大气是一个流体动力学系统，遵守动力学方程。然而对预报有意义的所谓“长期天气”却是更精细的部分，这部分是一个随机扰动，不遵守或不完全遵守动力学规律，因此纯粹用动力学方法不能完全解决预报问题。我们需要研究大气运动的统计规律性，研究大气遵循怎样的统计规律。

2）我们认为，由于地气系统的特殊性质及输入的周期变化，决定了这个系统存在随机扰动，这个扰动对后期大气运动产生随机影响。大气的最终表现是许多时刻随机扰动迭加的总效果。

3）上面的工作讨论了随机因素对大气运动的影响，但由于对“随机因素”并没有给出具体形式和量值(这应是进一步的工作)，因此，只能认为这是一个定性分析。这个定性分析对认识大气运动的统计规律性及长期天气的形成还是有帮助的。

附录：《方程(8)—(13)的解法》

$$\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x}+v=T'_{s0} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 T'_s}{\partial z^2}=\mu\frac{\partial T'_s}{\partial t} \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial T'_s}{\partial z}+\lambda_Q T'_s\right)\Big|_{z=0}=-\lambda_s\frac{\partial v}{\partial x}+Q(t) \tag{3}$$

$$T'_s|_{z=-\infty}=0 \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{t=0}=\xi^{\circ} \tag{5}$$

$$T'_s|_{t=0}\quad T'^{\circ}_s \tag{6}$$

假定 $Q(t)$是二阶随机变量,均方连续,均方可微,均方可积,并可表示为

$$Q(t)=m_Q(t)+\int_{\varLambda}V(\lambda)q(\lambda,t)d\lambda \tag{7}$$

其中 $m_Q(t)$为 $Q(t)$的数字期望, $q(\lambda,t)$ 为坐标函数, $\varLambda$ 为 λ 的积分区域。 $m_Q(t)$ 及 $q(\lambda,t)$均为确定性函数,"从而就可以把对随机函数施行的各种线性运算(例如:微分,积分及线性微分方程的求解等)转化为对非随机的坐标函数的相应运算,即转化为通常的解析运算"[4]。

对变量 t 取(1)—(6)的拉普拉斯变换,则

$$\varepsilon pL\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]-\varepsilon\xi^{\circ}+L[v]=L[T'_{s0}] \tag{8}$$

$$L\left[\frac{\partial^2 T'_s}{\partial z^2}\right]=\mu pL[T'_s]-\mu T'^{\circ}_s \tag{9}$$

$$\left.\left(L\left[\frac{\partial T'_s}{\partial z}\right]+\lambda_Q L[T'_s]\right)\right|_{z=0}=-\lambda_s L\left[\frac{\partial v}{\partial x}+L[m_Q\ \right]+L\left[\int_{\varLambda}V(\lambda)q(\lambda,t)d\lambda\right] \tag{10}$$

$$L[T'_s]|_{z=-\infty}=0 \tag{11}$$

其中 $L[\ \ ]$表示拉普拉斯变换。

对变量 x 取(8)—(11)的傅立叶变换,则

$$i\varepsilon\omega pFL[v]-\varepsilon F[\xi^{\circ}]+FL[v]=FL[T'_{s0}] \tag{12}$$

$$FL\left[\frac{\partial^2 T'_s}{\partial z^2}\right]=\mu pFL[T'_s]-\mu F[T'^{\circ}_s] \tag{13}$$

$$\left.\left(FL\left[\frac{\partial T'_s}{\partial z}\right]+\lambda_Q FL[T'_s]\right)\right|_{z=0}=$$

$$=-i\omega\lambda_s FL[v]+FL[m_Q]+\int_{\varLambda}V(\lambda)FL[q]d\lambda \tag{14}$$

$$FL[T'_s]|_{z=-\infty}=0 \tag{15}$$

其中 $F[\ \ ]$表示傅立叶变换。

由(12)式得

$$FL[v]=FL[T'_{s0}]+\varepsilon F[\xi^{\circ}]-i\varepsilon\omega pFL[v] \tag{16}$$

把(16)式代入(14)式⇒

$$\left.\left(FL\left[\frac{\partial T'_s}{\partial z}\right]+\lambda_Q FL[T'_s]\right)\right|_{z=0}=-i\omega\lambda_s FL[T'_{s0}]-i\varepsilon\omega\lambda_s F[\xi^{\circ}]-$$

$$-\varepsilon\omega^2 p\lambda_s FL[v]+FL[w_Q]+\int_{\varLambda}V(\lambda)FL[q]d\lambda \tag{17}$$

对长期天气过程 $\varepsilon \ll 1$,则由(1)式可知

$$v \simeq T'_{s0} \tag{18}$$

把(18)式代入(17)式,则

$$\left\{ FL\left[\frac{\partial T'_s}{\partial z}\right] + (\lambda_Q + i\omega\lambda_s + \varepsilon\omega^2 p\lambda_s) FL[T'_s] \right\}\Bigg|_{z=0} =$$

$$= -i\varepsilon\omega\lambda_s F[\zeta^\circ] + FL[m_Q] + \int_A V(\lambda) FL[q] d\lambda \tag{19}$$

令

$$A = (\lambda_Q + i\omega\lambda_s + \varepsilon\omega^2 p\lambda_s)$$

$$B = -i\varepsilon\omega\lambda_s F[\zeta^\circ] + FL[w_Q] + \int_A V(\lambda) FL[q] d\lambda$$

这时,(13)式相当于随机常微分方程,具有初始条件(19)(边界条件,这时相当于初始条件)。根据[5]它有唯一的均方解,而其形式与相应的确定性方程相似。因此,(13)式的解为

$$FL[T'_s] = \frac{B}{\sqrt{\mu p} + A} e^{\sqrt{\mu p}\, z} - \frac{1}{2\sqrt{\mu p}} \int_{-\infty}^{0} \mu F[T'^\circ_s] \cdot \left[e^{-\sqrt{\mu p}\, z'} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{\mu p} - A}{\sqrt{\mu p} + A} e^{\sqrt{\mu p}\, z'} \right] dz' + \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \int_{-\infty}^{z} \mu F[T'^\circ_s] \cdot [e^{\sqrt{\mu p}(z-z')} - e^{-\sqrt{\mu p}(z-z')}] dz'$$

当 $z=0$ 时,上式成为

$$FL[T'_{s0}] = \frac{B}{(\sqrt{\mu p} + A)} - \frac{1}{\sqrt{\mu p} + A} \int_{-\infty}^{0} \mu F\ [T'^\circ_s] e^{\frac{\lambda}{2} z'}\ dz'$$

由于 $e^{\frac{\lambda}{2} z'}$ 随 z' 的绝对值增大迅速减小,所以可用 $F[T'^\circ_{s0}]$代替 $F[T'^\circ_s]$,上式最后成为

$$FL[T'_{s0}] = \frac{B}{\sqrt{\mu p} + A} - \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{p}} \cdot \frac{F[T'^\circ_{s0}]}{(\sqrt{\mu p} + A)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu p} + \lambda_Q + i\omega\lambda_s + \varepsilon\omega^2 p\lambda_s} \cdot \Big(-i\varepsilon\omega\lambda_s F[\zeta^\circ] +$$

$$+ FL[m_Q] + \int_A V(\lambda) FL[q] d\lambda - \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{p}} F\ [T'^\circ_{s0}] \Big) \tag{20}$$

注意到上式分母的根为

$$\omega_1=-i\left(\frac{1}{2\,\varepsilon p}-\frac{1}{2\,\varepsilon p}\sqrt{1+4\,\varepsilon p\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}}\right)$$

$$\omega_2=-i\left(\frac{1}{2\,\varepsilon p}+\frac{1}{2\,\varepsilon p}\sqrt{1+4\,\varepsilon p\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}}\right)$$

则

$$\frac{1}{\lambda_s\varepsilon p\omega^2+i\lambda_s\omega+\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}=$$

$$=\frac{1}{i\lambda_s\sqrt{1+4\,\varepsilon p\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}}\left[\omega+i\left(\frac{1}{2\,\varepsilon p}-\frac{1}{2\,\varepsilon p}\sqrt{1+4\,\varepsilon p\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}}\right)\right]}-$$

$$-\frac{1}{i\lambda_s\sqrt{1+4\,\varepsilon p\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}}\left[\omega+i\left(\frac{1}{2\,\varepsilon p}+\frac{1}{2\,\varepsilon p}\sqrt{1+4\,\varepsilon p\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}}\right)\right]}$$

由于$\sqrt{1+4\varepsilon p\,\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}}=1+2\,\varepsilon p\,\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}+O(\varepsilon^2)$

把上式代入(21)式，忽略小项，并且

$$S=\omega+i\left(\frac{1}{\varepsilon p}+\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}\right)$$

$$T=\omega-i\left(\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}\right)$$

则

$$FL[T'_{s0}]=\varepsilon F[\zeta^\circ]\left\{\frac{\omega}{S}-\frac{\omega}{T}\right\}-$$

$$-\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{p}}\frac{F[T'^\circ_{s0}]}{\lambda_s}\left\{\frac{i}{S}-\frac{i}{T}\right\}+$$

$$+FL[m_Q]\left\{\frac{i}{S}-\frac{i}{T}\right\}+$$

$$+FL\left[\frac{1}{\lambda_s}\int_A V(\lambda)q(\lambda,t)d\lambda\right]\left\{\frac{i}{S}-\frac{i}{T}\right\} \tag{22}$$

取(22)式的傅立叶反演，则

$$L[T'_{s0}]=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\varepsilon\zeta^{\circ}(x')\left\{\frac{\omega}{S}-\frac{\omega}{T}\right\}e^{i\omega(x-x')}dx'd\omega-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{p}}\cdot\frac{1}{\lambda_s}T'^{\circ}_{s0}(x')\left\{\frac{i}{S}-\frac{i}{T}\right\}e^{i\omega(x-x')}dx'd\omega+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda_s}\cdot L[m_Q]\left\{\frac{i}{S}-\frac{i}{T}\right\}e^{i\omega(x-x')}dx'd\omega+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda_s}\cdot\int_{\Lambda}V(\lambda)q\,d\lambda\cdot\left\{\frac{i}{S}-\frac{i}{T}\right\}e^{i\omega(x-x')}dx'd\omega \tag{23}$$

令

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{S}e^{i\omega(x-x')}d\omega$$

$$I_2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{T}e^{i\omega(x-x')}d\omega$$

$$K_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{S}e^{i\omega(x-x')}d\omega$$

$$K_2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{T}e^{i\omega(x-x')}d\omega$$

显然

$$\frac{dI_1}{d(x-x')}=-K_1,\quad \frac{dI_2}{d(x-x')}=-K_2$$

并且

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{\omega+i\left(\frac{1}{\varepsilon p}+\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}\right)}e^{i\omega(x-x')}\,d\omega$$

$$=\begin{cases}2\pi e^{-\left(\frac{1}{\varepsilon p}+\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}\right)(x'-x)} & \text{当 } x'-x\geqslant 0 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } x'-x<0 \text{ 时}\end{cases}$$

$$I_2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{\omega-i\left(\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}\right)}e^{i\omega(x-x')}d\,\omega$$

$$=\begin{cases}-2\pi e^{-\left(\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}\right)(x'-x)} & \text{当 } x'-x\leqslant 0 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } x'-x>0 \text{ 时}\end{cases}$$

$$K_1=-\frac{dI_1}{d(x-x')}=\begin{cases}-2\pi\left(\frac{1}{\varepsilon p}+\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}\right)e^{-\left(\frac{1}{\varepsilon p}+\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}\right)(x'-x)} & \text{当 } x'-x\geqslant 0 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } x'-x<0 \text{ 时}\end{cases}$$

$$K_2=-\frac{dI_2}{d(x-x')}=\begin{cases}2\pi\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}e^{-\left(\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}\right)(x'-x')} & \text{当 } x'-x\leqslant 0 \text{ 时}\\ 0 & \text{当} x'-x>0 \text{ 时}\end{cases}$$

把上述关系式代入(23)式，则

$$\begin{aligned}L[T'_{s0}]=&\int_x^\infty \varepsilon\xi^\circ(x')\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(e^{-\left(\frac{1}{\varepsilon p}+\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}\right)\alpha}\right)\bigg|_{\alpha=x'-x'}dx'\\ &-\int_{-\infty}^x \varepsilon\xi^\circ(x')\frac{\partial}{\partial\beta}\left(e^{-\left(\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}\right)\beta}\right)\bigg|_{\beta=x'-x}dx'\\ &-\int_x^\infty\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{p}}\cdot\frac{1}{\lambda_s}\cdot T'^\circ_{s0}(x')e^{-\left(\frac{1}{\varepsilon p}+\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}\right)(x'-x)}dx'\\ &-\int_{-\infty}^x\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{p}}\cdot\frac{1}{\lambda_s}\cdot T'^\circ_{s0}(x')e^{-\left(\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}\right)(x'-x)}dx'\\ &+\int_x^\infty\frac{1}{\lambda_s}\cdot L[\dot{m}_Q]e^{-\left(\frac{1}{\varepsilon p}+\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}\right)(x'-x)}dx'\\ &+\int_{-\infty}^x\frac{1}{\lambda_s}\cdot L[m_Q]e^{-\left(\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}\right)(x'-x)}dx'\\ &+\int_x^\infty\frac{1}{\lambda_s}\cdot L\left[\int_\Lambda V(\lambda)q(\lambda,t)d\lambda\right]\cdot e^{-\left(\frac{1}{\varepsilon p}+\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}\right)(x'-x)}dx'\\ &+\int_{-\infty}^x\frac{1}{\lambda_s}\cdot L\left[\int_\Lambda V(\lambda)q(\lambda,t)d\lambda\right]\cdot e^{-\left(\frac{\lambda_Q+\sqrt{\mu p}}{\lambda_s}(x'-x)\right.}dx'\end{aligned}\tag{24}$$

应用下列反演公式：

$$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\sqrt{ap}}\backsim\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a}{4t}}$$

$$e^{-a\sqrt{p}}\backsim\psi(a,t)$$

$$\sqrt{p}\,e^{-\alpha\sqrt{p}} \backsim \frac{1}{2t}\chi(\alpha,t)\cdot\left[\frac{\alpha^2}{2t}-1\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{\alpha}{p}} \backsim J_0(2\sqrt{\alpha t})$$

$$p\,e^{-\sqrt{\alpha p}} \backsim \left(\frac{\alpha}{2t}-3\right)\frac{1}{4\sqrt{t^5}}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\frac{\alpha}{4t}}$$

其中
$$\psi(\alpha,\ t)=\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$$

$$\chi(\alpha,\ t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$$

$J_0(\beta)$为零阶贝塞尔函数。

取(24)式的拉普拉斯反演，则得到解的表达式

$$T'_{s0}\simeq v=\frac{\sqrt{\mu}}{\lambda_s}\int_{-\infty}^{x}T'^{\circ}_{s0}(x')\cdot e^{-\frac{\lambda_Q}{\lambda_s}(x'-x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{\mu(x'-x)^2}{4\lambda_s^2 t}}dx'+$$

$$+\frac{\sqrt{\mu}}{\lambda_s}\int_x^{\infty}\int_0^t T'^{\circ}_{s0}\ e^{-\frac{\lambda_Q}{\lambda_s}(x'-x)}\cdot J_0\left(2\sqrt{\frac{(x'-x)(t-t')}{\varepsilon}}\right)\cdot\frac{1}{2t'}\cdot x\left(\frac{\sqrt{\mu}(x'-x)}{\lambda_s},t'\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\frac{\mu(x'-x)^2}{\lambda_s^2}}{2t'}-1\right)dt'dx'-\varepsilon\int_{-\infty}^{x}\xi^{\circ}(x')\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(e^{-\frac{\lambda_Q}{\lambda_s}\alpha}\cdot\psi\left(\frac{\sqrt{\mu}\,\alpha}{\lambda_s},t\right)\right)\right]\Bigg|_{\alpha=x'-x}dx'+$$

$$+\int_x^{\infty}\int_0^t\frac{\partial}{\partial\beta}e^{-\frac{\lambda_Q}{\lambda_s}\beta}\cdot J_0\left(2\sqrt{\frac{\beta(t-t')}{\varepsilon}}\right)\cdot\left(\frac{\mu\beta^2}{2\lambda_s^2 t'}-3\right)\cdot\frac{1}{4t'^2}\sqrt{\frac{\mu\beta^2}{\lambda_s^2}}\cdot\chi\left(\frac{\sqrt{\mu}\,\beta}{\lambda_s},t'\right)$$

$$\Bigg|_{\beta=x'-x}dt'dx'+\frac{1}{\lambda_s}\int_{-\infty}^{x}\int_0^t m_Q(t-t')\cdot e^{-\frac{\lambda_Q}{\lambda_s}(x'-x)}\cdot\Psi\left(\frac{\sqrt{\mu}(x'-x)}{\lambda_s},t'\right)dt'dx'+$$

$$+\frac{1}{\lambda_s}\int_x^{\infty}\int_0^t m_Q(t-t')\cdot e^{-\frac{\lambda_Q}{\lambda_s}(x'-x)}\ J_0\left(2\sqrt{\frac{(x'-x)(t-t'')}{\varepsilon}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{\mu(x'-x)^2}{\lambda_s^2}}{2t''}-3\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{\frac{\sqrt{\mu}(x'-x)}{\lambda_s}}{4\sqrt{t''^5\pi}}\cdot e^{-\frac{\mu(x'-x)^2}{4\lambda_s^2 t''}}dt''dt'dx'+\frac{1}{\lambda_s}\int_{-\infty}^{x}\int_0^t\int_{\Lambda}V(\lambda)\cdot q[(t-t'),\lambda]\cdot$$

$$\cdot e^{-\frac{\lambda_Q}{\lambda_s}(x'-x)}\cdot\Psi\left(\frac{\sqrt{\mu}(x'-x)}{\lambda_s},t'\right)d\lambda\,dt'\,dx'+\frac{1}{\lambda_s}\int_x^{\infty}\int_0^t\int_0^{t'}\int_{\Lambda}V(\lambda)\cdot q[(t-t'),\lambda]\cdot$$

$$\cdot e^{-\frac{\lambda_Q}{\lambda_s}(x'-x)}\cdot J_0\left(2\sqrt{\frac{(x'-x)(t'-t'')}{\varepsilon}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{\mu(x'-x)^2}{\lambda_s^2}}{2t''}-3\right)\cdot\frac{\frac{\sqrt{\mu}(x'-x)}{\lambda_s}}{4\sqrt{t''^5\pi}}\cdot$$

$$\cdot e^{-\frac{\mu(x'-x)^2}{4\lambda_s^2 t''}}d\lambda dt''dt'dx'$$

参 考 文 献

[1] 顾震潮,«大气运动控制观»动力气象论文集 1961 年。
[2] 巢纪平,一种长期数值天气预报方法的物理基础,中国科学,1977 年 2 月。
[3] Д. И. 卡扎凯维奇,随机函数原理及其在水文气象中的应用,科学出版社,1974 年 2 月版。
[4] В. С. Пугачев 随机函数理论及其在自动控制中的应用,科学出版社,1966 年版。
[5] 张柄根等,科学与工程中的随机微分方程,海洋出版社,1980 年版。

A RANDOM SOLUTION OF MODEL FOR LONG-RANGE FORECAST

Li Tianshang

(Song Hua Jian Meteorological Service)

Abstract

It is described in this article that the earth-atmosphere system is approximately assumed to be one which has a linear-responsive system of random interference to the solar radiation, has obtained a random solution and has proved that the long-range state of the atmospheric motion is the pile-up of the influence of the innumerable random factors in a good deal of time.