第 38 卷 第 2 期　　气 象 学 报　　Vol. 38, No. 2
1980 年 6 月　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　Jun., 1980

纬圈平均大气运动特征的振动*

谢 义 炳

（北京大学地球物理系）

提　　要

本文考虑高度非线性的大气中期运动是一种准涡旋运动，引用了准涡旋观点和方法来处理二维无辐散和三维运动方程，即在开始时保留涡旋项，而在对方程进行纬圈平均后，去掉一些涡旋项，得到了某些大气运动特征如西风指数、纬向动量和涡度的经向输送的纬圈平均值等的变化或摆动的振动方程，并求出谐波解。振动周期决定于经向动能二倍的纬圈平均值的平方根 $(\overline{v^2})^{\frac{1}{2}}$。基本周期约二十天左右。

所得结果可能对极端复杂的大气运动总有出现中期振动的趋势和精致设计的圆盘模拟实验出现摆动的事实，提供某种程度的动力学解释，同时也可能对中期预报的实践提供一些依据。

本文的主要科学目的，是想指出对极端复杂的大气中期过程还是可能用线性理论来研究其某些特征的。

一、引　　言

大气运动显然是非线性的。然而，在某些情况下，在较短的时间里，应用线性理论却可以得到一些在一定程度上符合事实的、非常有用的结果。这可能反映大气运动有某种线性振动的因素和趋势，但由于受到种种干扰，这种线性振动只能在某些时间里以某种有限的清晰程度呈现出来。

大气纬向风速指数和涡度或动量的经向输送的纬圈平均值等的观测事实，不论高纬度或低纬度，都有呈现中期周期振动的趋势，虽然这种周期常不完整。在特别精致安排的圆盘模拟实验中，也能出现类似情况，并被称为摆动(Vacillation)。这反映大气的中期变化过程和短期过程一样，也可能有某种振动的因素和趋势，但这种振动也因为受到干扰而表现不清楚和不完整。

中期过程的线性理论研究远落后于短期过程的同类研究。这可能是由于短期过程中所假设的某些不变的特征如基本气流的速率等在中期过程中却是变的。因而在研究大气中期过程的振动性质时，似需要从大气运动的本质上，引进某些观点和假设，以及与之相适应的数学处理方法。

大气运动的观测事实启示我们，大气运动可以被看成是半涡旋(或半湍流)或准涡旋(或准湍流)运动。本文考虑到大气运动的这种性质，在大气运动的支配方程中，用准涡旋(或准湍流)近似处理，即最初考虑涡旋项，而在对方程取纬圈平均后却略去一些涡旋

* 本文于 1979 年 10 月 17 日收到，于 1979 年 11 月 22 日收到修改稿。

项。并谋求由这样处理后的方程组导出某些大气运动特征如纬圈平均纬向风速等等的振动方程，并求得它们的解，因而对某些众所周知的观测和实验模拟事实提供一种尝试性的解释，并为现在常用的某些中期预报方法提供一些理论依据。

本文最主要的科学目的是想启示，虽然中期过程是很复杂的，高度非线性的，但是还是可能用线性理论来探讨其某些特征的。

二、两维无辐散准涡旋运动

两维无辐散运动是最简单的大气运动，我们先在这种运动中试用准涡旋近似。

两维无辐散运动的基本方程作如下形式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=f(v-v_g) \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=f(u_g-u) \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{3}$$

所采用的符号是一般常用的。利用(3)式，(1)式和(2)式可以被改写成

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial uu}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}=f(v-v_g) \tag{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial uv}{\partial x}+\frac{\partial vv}{\partial y}=f(u_g-u) \tag{5}$$

对方程(3)，(4)和(5)取纬圈平均，用符号“—”表示这种平均值，得

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{uv}}{\partial y}=f\bar{v} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{vv}}{\partial y}=f(\bar{u}_g-\bar{u}) \tag{7}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}=0 \tag{8}$$

如考虑流体是在两个固体边界间运动，这两个固体边界间的距离是 l，则在边界上平均经向运动是零，即

$$y=0,\ l\ 处，\bar{v}=v=0 \tag{9}$$

按定义 $\bar{v}$ 只是 y 和 t 的函数。由(8)式，$\bar{v}$ 只是 t 的函数。再根据边界条件(9)，得

$$\bar{v}\equiv 0 \tag{10}$$

因此，(6)和(7)式可以简化为

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{uv}}{\partial y}=0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y}=f(\bar{u}_g-\bar{u}) \tag{12}$$

(11)式是众所周知的纬圈平均动量的涡旋输送方程。(12)式指出 $\overline{v^2}$ 随 y 的变化取决于

$\bar{u}_g$ 和 $\bar{u}$ 的差别。这种差别除边界附近外，一般是比较小的。因此，在相当大的程度上，可以把 $\overline{v^2}$ 看成不是 y 的函数。甚至进一步地，把 $\overline{v^2}$ 看成是常数，即也不随 t 变。

有了(11)式，如我们能够从基本运动方程出发，建立一个纬圈平均动量的涡旋输送的局地变化与纬圈平均动量的切变成某种比例关系的方程，即

$$\frac{\partial\overline{uv}}{\partial t}\propto-\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}$$

这个方程在物理上是可以理解的，则可以导出纬圈平均动量和纬圈平均涡旋动量输送的振动方程。

以 v 乘(4)式，u 乘(2)式，相加得

$$\frac{\partial uv}{\partial t}+\frac{\partial uuv}{\partial x}+\frac{\partial uvv}{\partial y}=fv(v-v_g)+fu(u_g-u)$$

对上式取纬圈平均，得

$$\frac{\partial\overline{uv}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{uvv}}{\partial y}=f\,\overline{v(v-v_g)}+f\overline{u(u_g-u)}\tag{13}$$

在这里引进假设

$$\begin{aligned}\overline{uvv}&=\overline{uv'^2}=\bar{u}\overline{v'^2}+\overline{u'v'^2}\doteq\bar{u}\overline{v'^2}=\bar{u}\overline{v^2}\\ \overline{u(u_g-u)}&=\bar{u}\,\overline{(u_g-u)}+\overline{u'(u_g-u)'}\doteq\bar{u}(\overline{u_g}-\bar{u})\\ \overline{v(v-v_g)}&=\overline{v'^2}-\overline{v'v_g'}\doteq0\end{aligned}\tag{14}$$

即在这里略去了涡旋项，而出发时是考虑涡旋项的。这种近似或可称之为准涡旋近似。

把(14)式所表达的近似假设用于(13)式得

$$\frac{\partial\overline{uv}}{\partial t}+\frac{\partial\bar{v}\overline{v^2}}{\partial y}=f\bar{u}(\bar{u}_g-\bar{u})\tag{15}$$

引用关系式(12)，则(15)式简化为

$$\frac{\partial\overline{uv}}{\partial t}+\overline{v^2}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}=0\tag{16}$$

(16)式就是我们所希望建立的方程式。

$\overline{v^2}$ 是经向运动动能的纬圈平均值的一种量度，根据前面的讨论，在下面的运算中，作为近似拟取作常数。

对(11)式取 t 的偏微商，对(16)式取 y 的偏微商，再将两者相减，得

$$\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}=\overline{v^2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}\tag{17}$$

对(16)式取 t 的偏微商，对(11)式取 y 的偏微商后，再乘以 $\overline{v^2}$，两者相减，得

$$\frac{\partial^2\overline{uv}}{\partial t^2}=\overline{v^2}\frac{\partial^2\overline{uv}}{\partial y^2}\tag{18}$$

显然(17)式和(18)式依次是纬圈平均动量(在中高纬度通称西风指数)和纬圈平均的

涡旋动量输送的振动方程。

当然，(17)式和(18)式也可以写成

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}=\overline{v'^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \tag{17 a}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{u'v'}}{\partial t^2}=\overline{v'^2}\frac{\partial^2 \overline{u'v'}}{\partial y^2} \tag{18 a}$$

(17 a)，(18 a)式可能比(17)，(18)式在表达物理意义上明确些，但计算时则可能繁一些。

上述处理动量的方法也同样适用于绝对涡度。用两维运动的涡度方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\eta=0 \tag{19}$$

$$\eta=f+\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

代替方程(1)，则利用连续方程(3)，(19)式可以改写成

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial u\eta}{\partial x}+\frac{\partial v\eta}{\partial y}=0 \tag{20}$$

对方程(20)取纬圈平均，得

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{v\eta}}{\partial y}=0 \tag{21}$$

(21)式是纬圈平均绝对涡度的涡旋输送方程。我们还需要一个纬圈平均绝对涡度的涡旋输送的局地时间变化与纬圈平均绝对涡度的切变成比例的关系式，即

$$\frac{\partial \overline{v\eta}}{\partial t}\propto-\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y}$$

以 v 乘(20)式，以 η 乘(2)式，两者相加，得

$$\frac{\partial v\eta}{\partial t}+\frac{\partial uv\eta}{\partial x}+\frac{\partial vv\eta}{\partial y}=\eta f(u_g-u)$$

对上式取纬圈平均，得

$$\frac{\partial \overline{v\eta}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{vv\eta}}{\partial y}=\overline{\eta f(u_g-u)} \tag{22}$$

采用准涡旋近似，即

$$\overline{vv\eta}\doteq\overline{v^2}\,\bar{\eta}$$

$$\overline{\eta f(u_g-u)}\doteq\bar{\eta}\,\overline{f(u_g-u)} \tag{23}$$

并利用(12)式，则(22)式可写成

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{v\eta}+\overline{v^2}\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y}=0 \tag{24}$$

(24)式就是我们希望建立的方程。由(21)式和(24)式，取 $\overline{v^2}$ 为常数，得

$$\frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial t^2}=\overline{v^2}\frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial y^2} \tag{25}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{v\eta}}{\partial t^2}=\overline{v^2}\frac{\partial^2 \overline{v\eta}}{\partial y^2} \tag{26}$$

(25) 式是纬圈平均绝对涡度的振动方程，(26) 式是纬圈平均的绝对涡度输送的振动方程。

注意到$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}=0$，$\frac{\partial f}{\partial t}=0$，如取$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial \beta}{\partial y}\doteq 0$，将纬圈平均动量的振动方程(17)式对$y$取偏微商，就得到(25)式。

三、准三维准涡旋运动

上述两维无辐散准涡旋运动的讨论，可以推广到准三维准涡旋运动。三维运动的基本方程是

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+\omega\frac{\partial}{\partial p}\right)\eta=-\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p}+\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p} \tag{27}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+\omega\frac{\partial}{\partial p}\right)v=f(u_g-u) \tag{28}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+\omega\frac{\partial}{\partial p}\right)\omega=0 \tag{29}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial p}=0 \tag{30}$$

在静力平衡假定下，$\frac{dw}{dt}=0$，在(x, y, p)坐标系中，近似地写成(29)式。考虑(30)式，(27)式可以改写成

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial u\eta}{\partial x}+\frac{\partial v\eta}{\partial y}+\frac{\partial \omega\eta}{\partial p}=\eta\frac{\partial \omega}{\partial p}-\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p}+\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p} \tag{31}$$

通过简单运算，(31)式简化为

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial u\eta}{\partial x}+\frac{\partial v\eta}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\omega\frac{\partial v}{\partial p}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\omega\frac{\partial u}{\partial p}\right) \tag{32}$$

考虑(30)式，(28)式可以改写成

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial uv}{\partial x}+\frac{\partial vv}{\partial y}+\frac{\partial \omega v}{\partial p}=f(u_g-u) \tag{33}$$

对(32)，(33)和(30)式取纬圈平均，得

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{v\eta}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\ \overline{\omega\frac{\partial u}{\partial p}} \tag{34}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{vv}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{v\omega}}{\partial p}=f(\bar{u}_g-\bar{u}) \tag{35}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p}=0 \tag{36}$$

(34)式是三维运动中纬圈平均绝对涡度的涡旋输送方程，其与两维无辐散运动中(21)式

的差别在于有右方的一项。

同两维无辐散运动的讨论一样，我们还需要从基本方程导出一个纬圈平均绝对涡度的经向涡旋输送的局地时间变化与纬圈平均绝对涡度的切变成某种比例的方程。为此，以v乘(31)式，η乘(28)式，再相加，得

$$\frac{\partial v\eta}{\partial t}+\frac{\partial uv\eta}{\partial x}+\frac{\partial vv\eta}{\partial y}+\frac{\partial v\omega\eta}{\partial p}=v\eta\frac{\partial\omega}{\partial p}-v\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p}+v\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p}+\eta f(u_g-u)$$

简化后，上式可写成

$$\frac{\partial v\eta}{\partial t}+\frac{\partial uv\eta}{\partial x}+\frac{\partial vv\eta}{\partial y}=-v\frac{\partial}{\partial x}\left(\omega\frac{\partial v}{\partial p}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\omega\frac{\partial u}{\partial p}\right)-\eta\omega\frac{\partial v}{\partial p}+\eta f(u_g-u) \quad (37)$$

对上式取纬圈平均，得

$$\frac{\partial\overline{v\eta}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{vv\eta}}{\partial y}=-\overline{v\frac{\partial}{\partial x}\left(\omega\frac{\partial v}{\partial p}\right)}+\overline{v\frac{\partial}{\partial y}\left(\omega\frac{\partial u}{\partial p}\right)}-\overline{\eta\omega\frac{\partial v}{\partial p}}+\overline{\eta f(u_g-u)}$$

如省略上式右方第一、第二项，即省略涡管的转动项和相对涡度的垂直平流项，则得

$$\frac{\partial\overline{v\eta}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{v^2\eta}}{\partial y}=-\overline{\eta\omega\frac{\partial v}{\partial p}}+\overline{\eta f(u_g-u)} \quad (38)$$

在这里引进准涡旋近似，即

$$\begin{aligned}&\overline{v^2\eta}\doteq\overline{v^2}\,\overline{\eta}\\&\overline{\eta\omega\frac{\partial v}{\partial p}}\doteq\overline{\eta}\,\overline{\omega\frac{\partial v}{\partial p}}\\&\overline{\eta f(u_g-u)}\doteq\overline{\eta}\,f\overline{(u_g-u)}\end{aligned} \quad (39)$$

和准定常近似，即在(35)式中考虑

$$O\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial t}\right)<O\left(\frac{\partial\overline{v^2}}{\partial y},\ f\overline{(u_g-u)},\ \frac{\partial\overline{v\omega}}{\partial p}\right)$$

因而

$$\frac{\partial\overline{v^2}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{v\omega}}{\partial p}\doteq f\overline{(u_g-u)} \quad (40)$$

我们注意到，在二维无辐散运动中$\overline{v}=0$，而在三维运动中$\overline{v}$却不等于零。在导出我们所需要的方程式时，在这里设$\overline{v}$的局地变化近于零，所以称之为准定常近似。再考虑

$$f>\overline{\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}}=-\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}$$

则(38)式简化为

$$\frac{\partial\overline{v\eta}}{\partial t}+\overline{v^2}\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial y}=f\,\overline{v\frac{\partial\omega}{\partial p}} \quad (41)$$

(41)就是我们所需要建立的方程。由(34)和(41)得

$$\frac{\partial^2\overline{\eta}}{\partial t^2}=\overline{v^2}\frac{\partial^2\overline{\eta}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial y}\,\overline{\omega\frac{\partial u}{\partial p}}-\frac{\partial}{\partial y}f\,\overline{v\frac{\partial\omega}{\partial p}} \quad (42)$$

$$\frac{\partial^2\overline{v\eta}}{\partial t^2}=\overline{v^2}\frac{\partial^2\overline{v\eta}}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial t}f\,\overline{v\frac{\partial\omega}{\partial p}}-\overline{v^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\overline{\omega\frac{\partial u}{\partial p}} \quad (43)$$

(42)式和(43)式是纬圈平均绝对涡度和纬圈平均绝对涡度的经向涡旋输送的振动方程。它们与二维无辐散运动中第(25)式和(26)式不同处，在于多了右边最后两个强迫项。

(42)式和(43)式中的强迫项是很复杂的，必须进一步引用准涡旋近似，才能用分析方法加以处理。即设

$$\overline{\omega\frac{\partial u}{\partial p}} \doteq \overline{\omega}\frac{\partial \overline{u}}{\partial p}$$

$$\overline{v\frac{\partial \omega}{\partial p}} \doteq \overline{v}\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial p} \tag{44}$$

这样，(42)式和(43)式简化为

$$\frac{\partial^2\overline{\eta}}{\partial t^2}=\overline{v^2}\frac{\partial^2\overline{\eta}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial y}\left(\overline{\omega}\frac{\partial \overline{u}}{\partial p}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(f\,\overline{v}\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial p}\right) \tag{45}$$

$$\frac{\partial^2\overline{v\eta}}{\partial t^2}=\overline{v^2}\frac{\partial^2\overline{v\eta}}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial t}\left(f\,\overline{v}\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial p}\right)-\overline{v^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\overline{\omega}\frac{\partial \overline{u}}{\partial p}\right) \tag{46}$$

运用(28)，(29)，和(30)式，按前面求振动方程的步骤，可以得出 $\overline{\omega}$ 和 $\overline{v\omega}$ 的振动方程

$$\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial t^2}=\overline{v^2}\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\overline{\omega^2}}{\partial t\,\partial p}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{\omega v}\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial p}\right) \tag{47}$$

$$\frac{\partial^2\overline{v\omega}}{\partial t^2}=\overline{v^2}\frac{\partial^2\overline{v\omega}}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\omega v}\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial p}\right)+\overline{v^2}\frac{\partial^2\overline{\omega^2}}{\partial y\partial p} \tag{48}$$

$\overline{v}$ 的振动方程也可以用类似方法求出。我们已经有了(35)式，只要导出一个如下的方程

$$\frac{\partial\overline{vv}}{\partial t}\propto-\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}$$

就成了。以 v 乘(28)式，得

$$v\frac{\partial v}{\partial t}+vu\frac{\partial v}{\partial x}+vv\frac{\partial v}{\partial y}+v\omega\frac{\partial v}{\partial p}=fv(u_g-u)$$

考虑连续方程 (30)，将 (28) 式改写后，再乘以 v，得

$$v\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial vu}{\partial x}+v\frac{\partial vv}{\partial y}+v\frac{\partial v\omega}{\partial p}=fv(u_g-u)$$

上述两个方程相加，得

$$\frac{\partial vv}{\partial t}+\frac{\partial uvv}{\partial x}+\frac{\partial vvv}{\partial y}+\frac{\partial vv\omega}{\partial p}=2\,fv(u_g-u)$$

再取纬圈平均，采用准涡旋和准定常近似，得

$$\frac{\partial\overline{vv}}{\partial t}+\overline{v^2}\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}+\overline{v\omega}\frac{\partial\overline{v}}{\partial p}=f\,\overline{v}(\overline{u}_g-\overline{u}) \tag{49}$$

这就是我们所需要的方程。由 (35) 和 (49) 式，在假定 $\overline{v^2}$ 是常数的情况下，得

$$\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial t^2}=\overline{v^2}\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\overline{v\omega}}{\partial t\partial p}+\frac{\partial}{\partial y}\overline{v\omega}\frac{\partial\overline{v}}{\partial p}+f\frac{\partial}{\partial t}(\overline{u}_g-\overline{u})-\frac{\partial}{\partial y}f\,\overline{v}(\overline{u}_g-\overline{u}) \tag{50}$$

$$\frac{\partial^2\overline{vv}}{\partial t^2}=\overline{v^2}\frac{\partial^2\overline{vv}}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{v\omega}\frac{\partial\bar{v}}{\partial p}\right)+\overline{v^2}\frac{\partial^2\overline{v\omega}}{\partial y\partial p}$$

$$+f\frac{\partial}{\partial t}\bar{v}(\bar{u}_g-\bar{u})-\overline{v^2}\frac{\partial}{\partial y}f(\bar{u}_g-\bar{u}) \tag{51}$$

(45)，(46)，(47)，(48)，(50) 和 (51) 式是各种运动特征量的振动方程。这六个方程可用逐步近似法求解。先去掉所有的强迫项，求自由振动方程的解，这些解可以称之为零级近似。然后，把求得的零级近似值代入强迫项，再解强迫振动方程，求得的解可以称之为一级近似。再把求得的一级近似解的有关值代入强迫项，求得的解可以称之为二级近似，以此类推，看所求得的解是否向某些值逐步收敛。

至于强迫项中的 $f(\bar{u}_g-\bar{u})$ 是根据 (35) 式，采用准定常近似，以 $\frac{\partial\overline{vv}}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial\overline{v\omega}}{\partial p}$ 的值代入的。

对 p 的微商项，可以用准三维方法，以差分来代替。最简单的是两层模式，即考虑大气分为上下层，主要研究 $p=250$，750 毫巴面上的运动。但 $p=500$ 毫巴面上的运动也要考虑，以便求 $p=250$，750 毫巴面上运动特征对 p 的差分。在 $p=0$,1000 毫巴面上，可设各种运动特征为零。至于对时间的微商，可以用相邻两个时间的差分来代替。

当然，在本节开始时，即可用最简单的涡度方程和 y 方向的运动方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\eta=-\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{52}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)v=f(u_g-u) \tag{53}$$

代替 (27)，(28) 式，这样运算简单些，强迫项也有差别，但并不影响问题的阐述。

四、振动方程的解

前两节中所有的振动方程都可用标准的数学物理方程方法求解。

令 $F_m(y,t)$ 是大气运动某些特征的纬圈平均值。$m=1$，2，3，4，5，6，7，8 时分别代表 $\bar{u}$，$\overline{uv}$，$\bar{\eta}$，$\overline{v\eta}$，$\bar{\omega}$，$\overline{v\omega}$，$\bar{v}$，$\overline{vv}$ 等，则前两节中所有的振动方程可以写成如下形式

$$\frac{\partial^2F_m}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2F_m}{\partial y^2}+g_m(y,F_m,t) \tag{54}$$

$$m=1,\cdots,8$$

在第二节的二维无辐散准涡旋运动中，强迫项是零。而在第三节准三维准涡旋运动中，则是有强迫项的。按上节最后的讨论，强迫项是用逐步近似法，以前一级的解代入的，因而在这里可以被认为是给定的。

(54) 式在下述条件下是可以求解的，

$$
\begin{aligned}
&y=0, l && F_m(y,t)=0 \\
&t=0 && F_m(y,t)=\varphi(y) \\
& && \dot{F}_m(y,t)=\varphi_1(y)
\end{aligned} \tag{55}
$$

这里符号“·”表示对 t 的偏微商，也用时间差分来代替。

方程（54）的解是

$$
F_m(y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi y}{l}
+\sum_{n=1}^{\infty}\Pi_n(t)\sin\frac{n\pi y}{l} \tag{56}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
A_n&=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(z)\sin\frac{n\pi z}{l}dz \\
B_n&=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\varphi_1(z)\sin\frac{n\pi z}{l}dz \\
\Pi_n(t)&=\frac{2}{l\omega_n}\int_0^t d\tau\int_0^l g_m(z,\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\sin\frac{n\pi z}{l}dz \\
\omega_n&=\frac{na\pi}{l}
\end{aligned} \tag{57}
$$

由（56）所表达的振动方程的谐波解，其基本周期可用下述方法估计出来。取

$$
\begin{aligned}
&n=1 \\
&l=10^4\text{ 公里}=10^7\text{ 米} \\
&a^2=\overline{v^2}=10^2\text{ 米}^2\text{秒}^{-2}
\end{aligned}
$$

即假设大气在赤道与北极间一万公里的空间里振动，基本振动的半波长是 l，即一万公里，v 的量级是 10 米秒$^{-1}$。基本振动周期是 T_1，则

$$
\frac{\pi aT_1}{l}=2\pi
$$

$$
T_1=\frac{2l}{a}\doteq 2\times10^6\text{ 秒}\sim 20\text{ 天}
$$

上述解法完全适用于 $\bar{u}$，$\overline{vu}$，$\overline{v\eta}$，$\bar{v}$，$\overline{vv}$ 和 $\overline{v\omega}$ 等大气特征的振动方程。但 $\bar{\eta}$ 在 $y=l$ 处，不是零，而是 2Ω 即地转角速的二倍。$\bar{\omega}$ 在 $y=0, l$ 不为零，而是振动的。所以在求解 $\bar{\eta}$ 的振动方程时，应将区间开拓到 $y=2l$ 处，在 $y=0$，$2l$ 处，令 $\bar{\eta}=0$，再求在 $0<y<2l$ 区间以 $y=l$ 点为对称点的对称解。$\bar{\omega}$ 可以不由它的振动方程求解，而在解出 $\bar{v}$ 的振动方程后，由纬圈平均后的连续方程（36）求出。或将区间开拓到 $y=\frac{3}{2}l$ 处，令 $y=\frac{l}{2}$，$\frac{3l}{2}$ 处，$\omega=0$，在区间 $\frac{l}{2}<y<\frac{3l}{2}$ 中求解。解出后，再用反对称法延伸到区间 $0<y<\frac{l}{2}$。

五、讨　　论

本文考虑大气运动是一种半涡旋（或半湍流）运动，引用了一种称为准涡旋（或准湍流）近似的处理方法，得出了某些大气大型运动宏观特征的振动方程，并列出了这些振动方程的解法和谐波解。其基本周期与观测事实的统计结果和精致安排的圆盘模拟实验结果相近，即二十天左右。这实质是用线性理论来处理非常复杂的非线性运动的某些统计特征。

最值得注意的是，所考虑的大气大型运动的各种宏观特征的振动都受 $a^2=\overline{v^2}$ 的制约。大气这些特征的振动方程与众所周知的弦振动和声波方程完全一样，只是在弦振动方程中 $a^2=\dfrac{T_0}{\rho}$，这里 T_0 是弦的张力，ρ 是弦的密度；而在声波方程中 $a^2=r\bar{p}/\bar{\rho}=rR\bar{T}$，这里 $r=c_p/c_v$，$\bar{p},\bar{\rho},\bar{T}$ 是没有受扰动的气压，空气的密度和温度。所以，在大气大型运动宏观特征的振动中，$\overline{v^2}$ 起了 T_0/ρ 在弦振动中和 $r\bar{p}/\bar{\rho}$ 在声波中的本质作用。显然，$\overline{v^2}$，T_0/ρ，$r\bar{p}/\bar{\rho}$ 都是能量的量度。

本文结果还可能对某些大气大型运动的宏观特征如动量的逆梯度输送提供一个说明，即它们是旋转流体的半涡旋或半湍流运动的振动特征。

本文所采用的观点和方法可能引起一些辩论。首先，准涡旋近似是否合理？这种近似在经典湍流理论中是不允许的。但三十年来一系列的工作都证明，大气中的大型湍流或涡旋与经典湍流理论中所考虑的小湍流是有不同性质的。所以，这里提出的准涡旋近似是有其科学实践的根据的。至于这种准涡旋近似的价值或合理性，则既需要受现有实践的裁判，更要受今后实践的裁判。

其次，$\overline{v^2}$ 在求振动方程时取作常值，而其本身是振动的，并在本文中列出了其振动方程即(51)式，这似乎是矛盾的，但是，这也可以看作是一种近似的处理方法。弦振动方程中张力 T_0 取作常数，而在振动时，弦的张力显然是变的。声波方程中 $\bar{T}$ 取作常数，而既然考虑了空气的压缩性和绝热过程，温度显然是变的。在弦振动和声波问题的处理中，引进了这些近似，却得到了相当满意的结果。为什么我们在处理大气大型运动的宏观特征的问题中，不可以试作类似的近似呢？再则，如保留涡旋项，可以把这些项归併到强迫项里，自由振动项还是一样的。

第三，$\overline{v^2}$ 在二十天左右的时间里是有相当变化的，这就不能不影响本文的结论。大气运动的确是复杂的，有各种各样的因素对大气运动施加影响。本文不过是企图阐明纬圈平均的经向运动动能对大气大型运动的某些宏观特征的作用。如有其他因素使 $\overline{v^2}$ 变，大气大型运动的宏观特征当然也会变的，正如任何原因使弦的张力变化，弦的振动也会变一样。

虽然，有上述或其他值得辩论处，但本文还是启示了高度非线性，很复杂的大气中期过程仍然可以用分析方法来阐明其某些宏观特征的。分析解和数值解的优点和缺点是众所周知的。至于本文所用的分析解法，当然是大有改进余地的。

本文所引用的观点和方法还可以引伸到斜压大气和球坐标，这将使数学处理更复杂些。

本文结果似应首先试用于500毫巴面，因为500毫巴面上的大气运动是最接近于两维无辐散运动的。取得经验后，再推广到三维运动。

致谢：本文完成后，杨大升和刘式适同志在讨论时提出若干意见，学报审稿时审稿同志也提出一些意见，这使定稿有所改进，谨此致谢。

THE OSCILLATION OF CERTAIN ZONAL MEAN CHARACTERISTICS OF ATMOSPHERIC MOTION

Xie Yi-bing (Yi-Ping Hsieh)

(Department of Geophysics, Beijing University)

Abstract

In this paper, the high non-linear atmospheric motion is considered as a kind of semi-or quasi-eddy motion. By introducing the method of quasi-eddy approximation, i. e., conserving the eddy terms at the beginning and then ignoring some of them after integrating the equations along the latitude circle, the oscillation equations of certain characteristics of atmospheric motion such as zonal index, zonal mean meridional transport of momentum and vorticity and etc. and their harmonic solutions are obtained. The period of oscillation depends on $\overline{V^2}$, a measure of the zonal mean meridional kinetic energy. The period of the first harmonic is about 20 days.

The results may probably explain to some extent the oscillation of certain zonal mean characteristics of the observed atmospheric motion and the vacillation of experimental simulation.

The main scientific purpose of this paper is to demonstrate that even the high non-linear extended atmospheric processes might be also attacked by linear theory.