

地转适应过程的数值试验*

袁重光 曾庆存

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文利用半球范围的非线性正压原始方程组的差分格式, 对地转适应过程的一些问题作了数值试验, 结果和以前的线性理论和非线性理论结果相一致, 还给出了适应过程所需的时间等特征的定量资料。此外, 文中还模拟了四维分析问题, 指出, 只更新气压场而不同时对风场作更新或适当处理, 是没有效果的。

一, 引 言

大尺度大气运动的主要特点之一就是准地转平衡, 这一现象已广泛应用于天气分析、预告以及动力气象、大气环流理论问题的研究。地转近似的应用, 成功地作出了第一个数值天气预告。但是, 准地转模式的准确度不够, 人们已转而应用原始方程作数值预告和大气环流研究。但在原始方程中, 既包含有慢波, 也包含有快波; 既有天气系统的演变过程, 也有地转适应过程^{[1], [2]}, 所以, 地转适应过程的研究显得重要起来了, 尤其是在非常规天气资料的四维分析以及初值处理中, 更进一步提出了和地转适应过程有关的新问题。

最早, Rossby 认为气压场和风场是相互调整适应的, 主要是气压场向风场适应。其后, A. M. Обухов 作了进一步的讨论, 他们都认为气压场主要向风场适应。

叶笃正通过对物理过程的分析, 指出: 在较大尺度运动的适应过程中, 主要是风场向气压场适应; 较小尺度的运动中, 主要是气压场向风场适应。接着, 曾庆存^{[1], [3]}、作了进一步的分析研究, 得到一个临界尺度 $L_0 = \frac{c}{f}$ (c 为重力波波速)。当运动尺度小于 L_0 时, 气压场向风场适应; 而运动尺度大于 L_0 时, 则风场向气压场适应。后来, 陈秋士^[4]也得到同样的结论。

上述结论是在线性化的假定下进行的。在现在广泛应用初始方程的情况下, 了解非线性适应过程的特点是很需要的。在[1]中曾对此作过初步分析, 指出, 对于大尺度运动来说, 同时进行着适应过程和演变过程, 二者还有相互影响, 而且只能有准地转关系。在一般情况下, 没有完全的适应。除此之外, 非线性项的作用还使得在散度场中可以分出和演变过程相对应的一部分, 它和涡旋场的结构有一定的配置关系, 即还有“散度场向涡旋场适应”^[5]。

本文直接用非线性正压原始方程进行数值试验, 对所有上面这些由理论推出的结论

* 本文于 1979 年 4 月 20 日收到。

作进一步的研究。对适应过程所需的时间以及适应过程的特性等得到一些更具体的结果。此外,我们还针对四维分析问题作了试验。

二、基本方程及计算格式

我们取球面上的正压大气原始方程组,利用极射投影,以 M 表示地图投影放大系数,有

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi u}{\partial t} + \frac{\partial \Phi u u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi v u}{\partial y} = \Phi \tilde{f} v - \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi v}{\partial t} + \frac{\partial \Phi u v}{\partial x} + \frac{\partial \Phi v v}{\partial y} = -\Phi \tilde{f} u - \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\tilde{f} = f + \left(u \frac{\partial M}{\partial y} - v \frac{\partial M}{\partial x} \right) + \frac{\cos \theta}{a r_0 \sin \theta} (v x - u y)$$

其中所有符号都是常用的。为便于计算起见,我们取矩形区域,并取刚性侧边界条件 $\bar{v} \cdot \bar{n} = 0$, 这里 \bar{n} 表示边界线的法线方向,这时有总质量守恒和总能量守恒

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \int_s \int \Phi ds = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_s \int \left[\Phi \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) + \frac{\Phi^2}{2} \right] ds = 0 \end{cases} \quad (2)$$

仿照[6], [7]引入灵活性替代,将方程(1)改写成(其中符号定义见(7))

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi^* u}{\partial t} + \frac{\partial \Phi^* u^* u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^* v^* u}{\partial y} = \Phi^* \tilde{f} v^* - \Phi^* \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi^* v}{\partial t} + \frac{\partial \Phi^* u^* v}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^* v^* v}{\partial y} = -\Phi^* \tilde{f} u^* - \Phi^* \frac{\partial \Phi^*}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi^* u^*}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^* v^*}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

若 $u \Phi^* \tilde{f} v^* - v \Phi^* \tilde{f} u^*$ 在全区域的积分为零,则仍能保持质量守恒和能量守恒。

取差分关系

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\delta_x A}{\delta x} = \begin{cases} \frac{A_{i+1} - A_{i-1}}{2 \delta x} & i = 2, 3, \dots, I - 1 \\ \frac{A_2 - A_1}{\delta x} & i = 1 \\ \frac{A_I - A_{I-1}}{\delta x} & i = I \end{cases} \quad (4)$$

$$\frac{\partial AB}{\partial x} = \begin{cases} \frac{1}{4 \delta x} [(A_{i+1} + A_i)(B_{i+1} + B_i) - (A_i + A_{i-1})(B_i + B_{i-1})] & i = 2, \dots, I - 1 \\ \frac{1}{2 \delta x} [(A_1 + A_2)(B_1 + B_2) - 4A_1 B_1] & i = 1 \\ \frac{1}{2 \delta x} [4A_I B_I - (A_I + A_{I-1})(B_I + B_{I-1})] & i = I \end{cases} \quad (5)$$

取全隐式，即用下述差分方程来逼近(3)

$$\begin{cases} \frac{\partial_t^+(\Phi^*u)}{\partial t} + \bar{D}^*(\bar{u}) = -\bar{\Phi}^{**}\bar{G}_x^{**} + \tilde{f}^{**}\bar{\Phi}^{**}\bar{v}^{**} \\ \frac{\partial_t^+(\Phi^*v)}{\partial t} + \bar{D}^*(\bar{v}) = -\bar{\Phi}^{**}\bar{G}_y^{**} - \tilde{f}^{**}\bar{\Phi}^{**}\bar{u}^{**} \\ \frac{\partial_t^+\Phi}{\partial t} + \bar{D}^*(1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

其中

$$\bar{D}^*(a) \equiv M^2 \left(\frac{\partial_x \bar{U}^* a}{\partial x} + \frac{\partial_y \bar{V}^* a}{\partial y} \right)$$

$$\bar{U}^* = \bar{\Phi}^* \bar{u}^* / M \quad \bar{V}^* = \bar{\Phi}^* \bar{v}^* / M \quad \frac{\partial_t^+ a}{\partial t} = \frac{a(t + \Delta t) - a(t)}{\Delta t} \quad (7)$$

$$\bar{a}^* = \sum_{k=0}^N \alpha_k \bar{a}_k \quad \bar{a} = \frac{1}{2} [a(t) + a(t + \Delta t)]$$

$$\bar{G}_x^{**} = \sum_{k=0}^N \beta_k \left(\frac{\partial_x \bar{\Phi}^*}{\partial x} \right)_k \quad \bar{G}_y^{**} = \sum_{k=0}^N \beta_k \left(\frac{\partial_y \bar{\Phi}^*}{\partial y} \right)_k$$

a 表示任一函数； α_k, β_k 表示取空间平均时第 k 点的权重； $k=0$ 表示中心点。本方案取 $N=4$ ，即取周围 4 点及中心点作平均，且 $\sum_{k=0}^N \alpha_k = \sum_{k=0}^N \beta_k = 1$ 。为控制寄生波，在计算时对柯氏力及气压梯度力中各量取两次空间平均。

先解(6)的第三方程得到 $\frac{\partial_t^+\Phi}{\partial t}$ ，再由关系式

$$\frac{\partial_t^+ AB}{\partial t} = \bar{A} \frac{\partial_t^+ B}{\partial t} + \bar{B} \frac{\partial_t^+ A}{\partial t} \quad (8)$$

即可求出 $\frac{\partial_t^+ u}{\partial t}$ 及 $\frac{\partial_t^+ v}{\partial t}$ 。为控制边界附近重力波的反射，我们再加入了粘性项，取作 $A_1 \bar{\Phi}^* \frac{\partial}{\partial x} \left(A_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) a$ ，其中 $A_1 = k_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^n$ ， $A_2 = (u^2 + v^2)^{1/2} + k_1$ ， r 为计算点距区域中心的距离， r_0 为常数， n 可取为 2 或 3， k_0 取为 50， k_1 取为 100，(k_0, k_1 均可按需要加以适当增减)。网格距取 300 公里，格点为 54×54 ，时间步长取为 20 或 30 分钟。

利用这种差分格式，我们作过好几个长达十几天的计算例子，计算场量没有紊乱现象，表明计算是稳定的。不过，就地转适应过程的数值试验来说，最多只需作二至三天的“预报”就行了。因此，稳定性是不成问题的。

三、若干局地扰动的数值试验

用上述计算方案作了下列几种试验：

1. 槽前小扰动

图 1 是基本场及小扰动的初始状态，图中实线为基本气压场及相应的地转风流场。小扰动分两种情况，a. 气压场有小扰动（如图中虚线），风场无扰动（流线如图中实线），b. 流场有小扰动（其流函数由图中虚线表示），气压场无扰动（如图中实线），在这两个

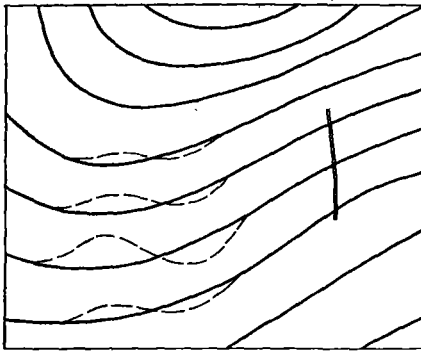


图 1

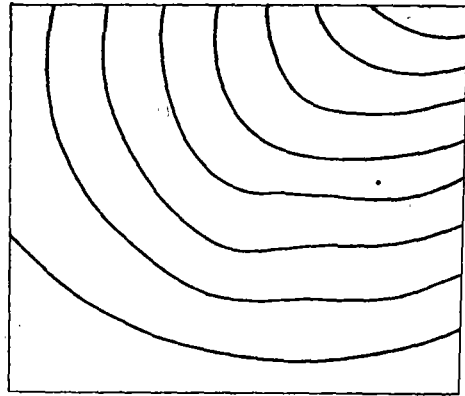


图 2

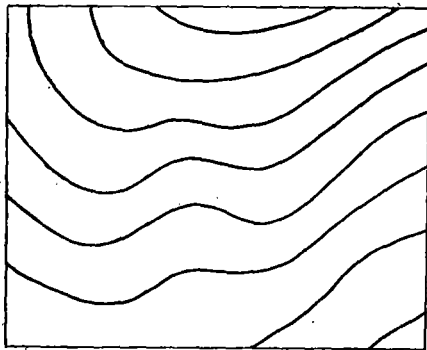


图 3

情况下, 扰动都位于槽前。图 2 为情况 a 中三小时后的气压场, 由图可见, 三小时后气压扰动的振幅已大为衰减, 至第六小时就已基本消失 (图未给出)。在情况 b 中, 一小时后气压场已经产生出一个明显的小扰动, 图 3 给出的是六小时的气压场, 此时气压扰动已经和初始风场扰动极相一致。此后, 扰动即沿基本气流场向前移动, 至 18 小时, 小扰动已移至图 1 中双线所示的位置。

在 a、b 两种情况中, 扰动尺度都比较小, 波长约 2000 公里, 即 $L \ll L_0$, 气压场向风场适应

都很清楚, 适应时间也较短, 六小时后振幅的起伏变化已经非常小。因此, 可以认为适应过程在六小时内即已完成。

如将小扰移至槽后, 其变化与在槽前时完全一致, 这里不另叙述。

2. 局地圆形扰动

在一均匀气压场上叠加一个圆形气旋式流场, 扰动区域直径约二千公里, 也属于 $L \ll L_0$ 情况。图 4 a 是圆形流场中心点高度随时间的变化, 图 4 b 是该点上散度随时间的变化。由图可见, 高度场的变化和线性情况下的变化过程极为相似, 散度场变化和它的配合也极为一致, 达到基本适应的时间约为一天。我们还作了另一个试验, 在静止流场上叠加一个圆形低压扰动, 其特点和上述的一样 (图未给出)。在上述两种情况中都是清楚的气压场向风场适应, 和线性情况下理论结果一致。只是在利用了非线性方程, 由于平流项的作用, 使得运动只能达到基本适应。运动的非地转部分减小至一定程度后将继续维持, 即保持有一定大小的地转偏差。由图 4 b 可见, 散度场并不围绕着零点振动。除了由快波引起的急剧变化之外, 还有一个和演变过程相对应的缓慢变化部分 (如图中虚线所示)。图 5 中给出了高度场扰动的径向传播, 由图可见, 重力-惯性波的波阵面不断向外传播。

3. 扰动区域较大的情况

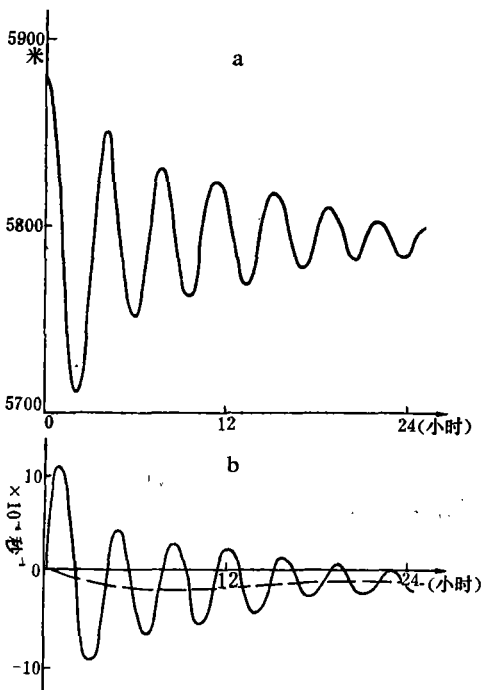


图 4

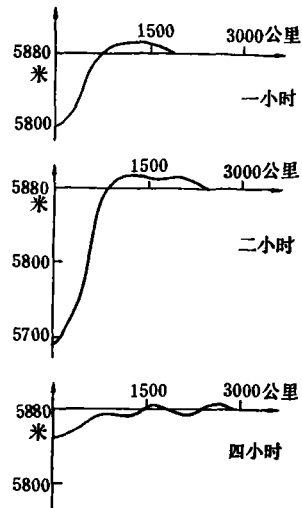


图 5

在上面几种情况中，初始非地转扰动区域都较小，如这种不平衡区域较大时，我们将会较清楚地看到适应过程受演变过程的影响。为此，我们作了一个试验，即在图 8 的槽线上加上一个较大的圆形涡旋扰动，但气压场不加扰动。由于将一个槽分裂为一个浅槽和一个切断涡旋，所以，除涡旋部分外，浅槽区也有较强的非地转扰动。结果是在前六小时，涡旋区的流场和气压场很快相互适应。此后，浅槽区的扰动传来，又重新引起不平衡，然后再逐渐减弱。与此同时，由流场的演变过程所带来的变化也开始明显起来了，所以，只有准平衡关系。图 6 a 和 6 b 分别为涡旋中心点及其前方 1200 公里处的高度（实线）和散度（虚线）随时间的变化。图 7 则是七小时后的流场（实线）和散度场（虚线为散度零线，D、C 分别为辐散、辐合中心），由此也可以看到二者已有较好的配置关系，确有“散度场适应于涡旋场”。上述结果与[1]、[5]的理论分析完全一致。

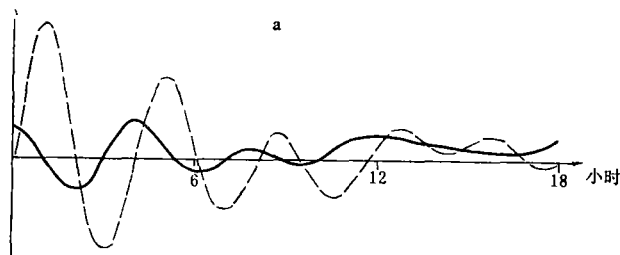


图 6 a

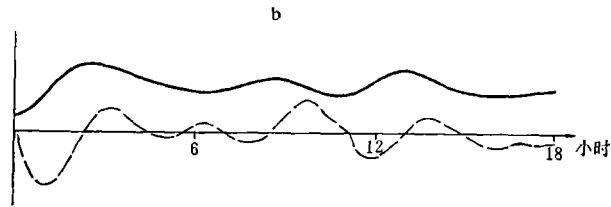


图 6b

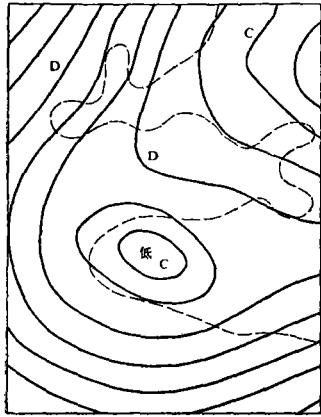


图 7

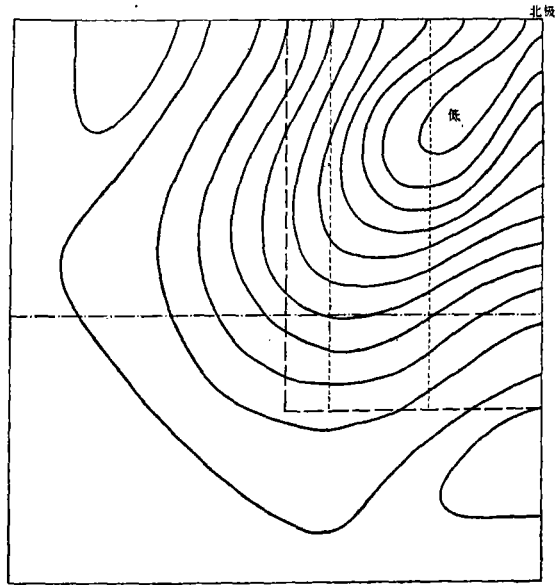


图 8

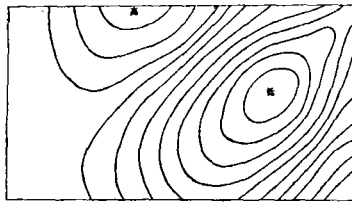


图 9a

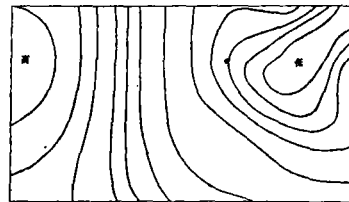


图 9b

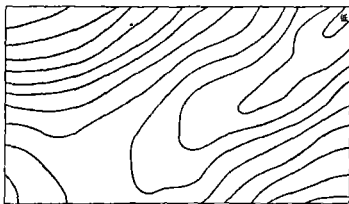


图 9c

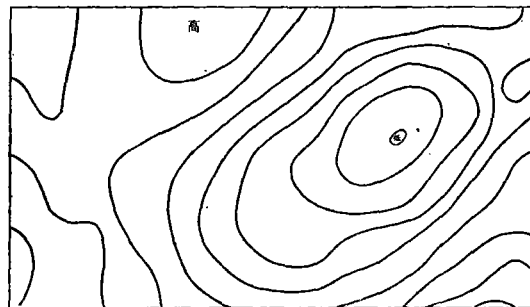


图 9d

四、半球尺度扰动情形

如果扰动区域很大，则快波能量事实上不能向更大得多的区域弥散，这时就不能将适应过程和演变过程分成两个阶段，我们将会看到两种过程相互作用的更复杂图景。为此，我们将初始非平衡扰动区域扩大到半球，取流场为在半球上对称于北极的四个行星波，图 8 给出了一个槽(全图的四分之一)，而气压场则为均匀的。在这种高度的不平衡状态下，由于整个区域都有非平衡的扰动能量，它们不可能向区域外弥散，只能在同样的区域内重新分布，因而激发出来的气压场变动是很大的。图 9 a—d 分别为三小时、六小时、二十四小时和四十八小时的高度场，图中给出的区域相当于图 8 中点划线以上部分。由图可见，三小时、六小时、二十四小时气压场的形势在激烈变动，直至四十八小时重力-惯性波仍然很明显，形势变化仍然较快不能平静下来。但是激发出的气压场其槽区脊区的配置却大体和流场相吻合，在二天的过程中系统也略有后退，反映了演变过程的作用以及“旋转适应过程”的作用(关于“旋转适应过程”的研究可参见[7])。

若初始有气压场扰动而流场为静止的，情况与此类似，这里不再详述。

五、四维分析问题的模拟试验

在用正压初始方程作四维分析时，只更新气压场或只更新风场或者二者同时更新，孰优孰劣，还存在不同看法。我们从适应的角度，用第二节所述模式及格式作了数值试验，采用图 8 的初始高度场及相应的地转风流场，十二小时预告高度场如图 10 中实线所示。(图 10 到 12 的范围相应于图 8 中虚线的右上部分)。考虑到气象卫星只在飞行轨道附近宽度为三千公里左右的带状区域内提供观测资料，而且在数值预报中，天气系统的移速往往比实况要慢。因此，我们在试验中采取下面一种更新试验，即将图 8 中二点线间的高度场加以“更新”而流场不变，“更新”为将高度场向前平移两个网格而得到，由此得到的高度场如图 11 a，再按此高度场作预报。一小时后闭合中心已减弱，如图 11 b，高度场的起伏振动，前三小时中已大为衰减，三小时后振动已很小，至十二小时更新的信息已大部消失，预报结果如图 10 中的虚线所示。第二个试验是将气压场和风场都进行更新，即高度场取为图 11 a，并按此高度场计算地转风作为更新后的流场，图 12 为三小时预告。其中，更新所得低压维持，以后也始终维持(图未给出)，与第一试验所得形势截然不同。

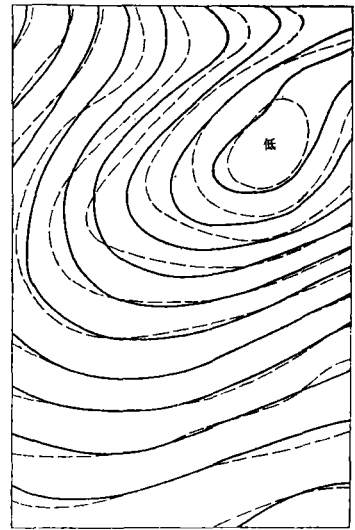


图 10

这种区别是不奇怪的，因为从适应的观点来看，更新的资料是局部的，更新后产生的散度场也并不太大，适应过程完成得很快，气压场很快向风场适应。上面的试验证实，当用正压初始方程作四维分析和预报时，考虑风场的更新是重要的，只更新高度场将是徒劳的。黄荣辉在对四维分析问题的讨论中，也有同样的看法。此外，更新的周期

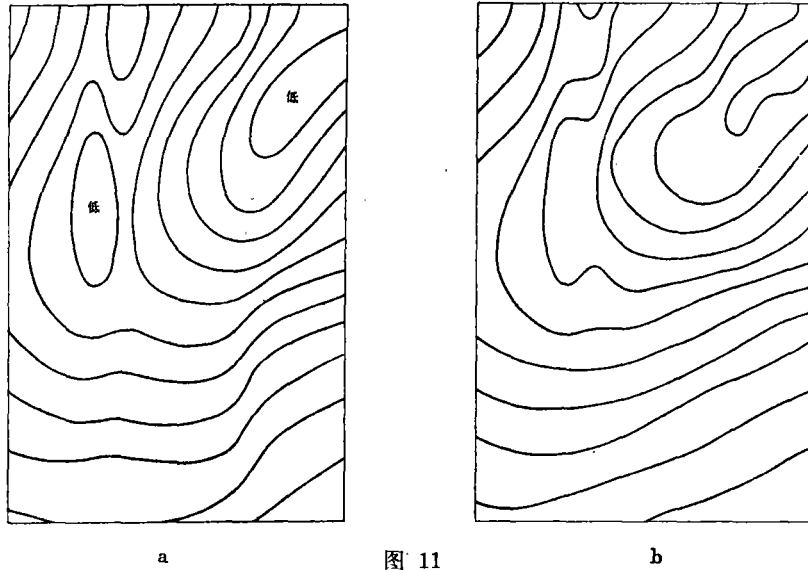


图 11

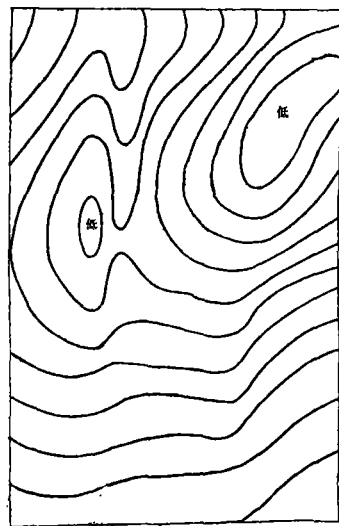


图 12

以大于三小时为宜，否则，重力-惯性波能量来不及有效地弥散掉，有可能得到计算不稳定的结果。

参 考 文 献

- [1] 曾庆存, 气象学报, 33(1963), №.2-3.
- [2] 叶笃正、李麦村, 大气运动中的适应问题, 科学出版社, 1965.
- [3] 曾庆存, 气象学报, 33(1963), №.1
- [4] 陈秋士, 气象学报, 33(1963), №.1-2
- [5] 曾庆存, 论初始场问题 1965 (尚未发表)
- [6] 曾庆存、季仲贞、袁重光; 第二次全国数值预报会议论文集, 1977.
- [7] 曾庆存, 数值天气预报的数学物理基础, 科学出版社, 1977.

SOME NUMERICAL EXPERIMENTS OF GEOSTROPHIC ADJUSTMENT

Yuan Chong-guang Zeng Qing-Gun

(Institute of Atmospheric Physics, Academic Sinica)

Abstract

Some aspects of geostrophic adjustment are investigated by numerical experiment with nonlinear barotropic primitive equations in hemispheric area. The results are in good agreement with those obtained previously by both the linear and nonlinear theory. The characteristic time required for the adjustment process as well as the other quantitative data are given. The problem of four-dimensional assimilation is also discussed, indicating that it would not be of benefit, if the updating is made only in the pressure field without treatment of wind field.