

## 赤道辐合带上扰动不稳定性的简单理论分析\*

谢义炳 黄寅亮

(北京大学地球物理系)

### 提 要

本文采用了简单的流体力学方法,在三种模式——正压扰动层、相当正压层、三维扰动——的情况下,对赤道辐合带上的扰动切变不稳定进行了理论分析,分别给出了分析解、数值解及可能的数值解方法。分析结果证明:不稳定情况的出现,与基本气流间切变的大小、纬度、及扰动的波长有关。一般在中高纬度分析中经常忽略的  $2\omega \cos \varphi$  是一个稳定因子。由简单到较复杂的模式分析中,可以看出实际情况是很复杂的,简单模式中所忽略的因子,可能增加了不稳定性。本文从理论上初步证实,在台风发生过程中,基本气流的动能由于不稳定转变为扰动动能,可能是一个并不是不重要的机制。

### 一、引 言

对东南亚基本气流与台风发生的一些事实进行统计与分析之后<sup>[1]</sup>,发现大多数台风发生于赤道西风与信风的交界面——赤道辐合带上。在这辐合带附近的切变是很大的,至少在部分台风发生的过程中,由于切变不稳定,基本气流的动能转变为涡旋扰动动能可能并不是一个不重要的机制。赤道西风的厚度在西太平洋区域由地面可达700毫巴高度,700毫巴以上为东风,700毫巴以下东西风的交界面为赤道切变辐合带。分析结果指出,这一交界面与地面近于垂直,大多为西西北—东东南或东—西走向,而且这两支基本气流在700毫巴以下的垂直切变都是很小的。由此有可能用比较简单的模式,来讨论在这一切变辐合带上两支基本气流的平均动能转变为扰动动能的可能性与条件的问题。本文对于只有切变存在的东西风交界面的不稳定问题,在三种简单理论模式情况下,进行了初步讨论。

### 二、出发方程及定解条件

自由大气中的基本方程组可写成:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega_x v - 2\omega_y w, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega_x u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + 2\omega_y u, \quad (3)$$

\* 本文1963年9月23日收到,1964年1月收到修改稿。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

其中  $\omega_x = 2\Omega \sin \varphi$ ;  $\omega_y = 2\Omega \cos \varphi$ ,  $\Omega$  是地球自轉角速度, 其它符号与一般习惯相同。

考虑基本气流是东西向的、均匀的、定常的, 并忽略扰动密度, 则可用以下条件对上述基本方程組进行小扰动綫性化

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho(y, z), & u &= U + u'(x, y, z, t), & v &= v'(x, y, z, t), \\ w &= w'(x, y, z, t), & p &= \pi(y, z) + p'(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

将(5)式代入(1)–(4)式, 取动量方程形式得到扰动方程組为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial m_1}{\partial t} + U \frac{\partial m_1}{\partial x} &= -\frac{\partial p'}{\partial x} + 2\omega_x m_2 - 2\omega_y m_3, \\ \frac{\partial m_2}{\partial t} + U \frac{\partial m_2}{\partial x} &= -\frac{\partial p'}{\partial y} - 2\omega_x m_1, \\ \frac{\partial m_3}{\partial t} + U \frac{\partial m_3}{\partial x} &= -\frac{\partial p'}{\partial z} + 2\omega_y m_1, \\ \frac{\partial m_1}{\partial x} + \frac{\partial m_2}{\partial y} + \frac{\partial m_3}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中

$$m_1 = \rho u', \quad m_2 = \rho v', \quad m_3 = \rho w'.$$

边界条件:

$z = z_0$  时,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{m} &= 0, & \mathbf{m} &= (m_1, m_2, m_3), \\ p' &= 0, & z_0 & \text{为扰动层上界;} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$y = \pm y_0$  时,  $m_2 = 0$ ,  $\pm y_0$  为扰动的南北界。 (8)

分界面条件: 假定东西风分界面是零阶稳定間断面 (见图 1)。

$y = 0$  时,

$$m_2 = \rho v'|_{y=0} = \rho \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \quad (9)$$

$$p'^I = p'^{II}, \quad (10)$$

$\eta$  是分界面形状,

$p'^I, p'^{II}$  分别表示分界面以北和分界面以南的扰动气压。

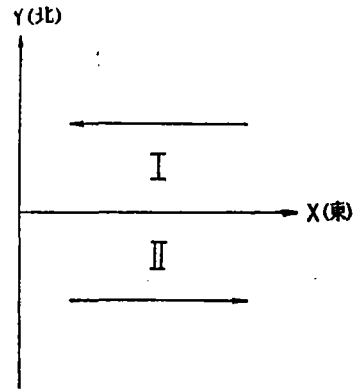


图 1 东西向气流及其間的不連續面

### 三、扰动的不稳定

因为(6)式都是綫性的, 所以有下列形式的特解

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= M_1(y, z) e^{i(\sigma t - Kx)}, & m_2 &= M_2(y, z) e^{i(\sigma t - Kx)}, & m_3 &= M_3(y, z) e^{i(\sigma t - Kx)}, \\ p' &= P(y, z) e^{i(\sigma t - Kx)}, & \eta &= H e^{i(\sigma t - Kx)}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中各式右方各系数都代表振幅。

将(11)式代入(6)及分界面条件(9)和(10)式, 則得

$$\left. \begin{aligned} iRM_1 &= iKP + 2\omega_x M_2 - 2\omega_y M_3, \\ iRM_2 &= -\frac{\partial P}{\partial y} - 2\omega_x M_1, \\ iRM_3 &= -\frac{\partial P}{\partial x} + 2\omega_y M_1, \\ -iKM_1 + \frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial M_3}{\partial x} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$R = (\sigma - KU), \quad (13)$$

$$\text{分界面条件: } y = 0 \text{ 时, } M_2 = i\rho RH, \quad (14)$$

$$P^I = P^{II}; \quad (15)$$

$$\text{边界条件: } x = x_0, \quad \mathbf{M} = 0, \quad P = 0, \quad \mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3), \quad (16)$$

$$y = \pm y_0, \quad M_2 = 0. \quad (17)$$

### 1. 正压扰动层的稳定性

考虑最简单的情况,任一扰动量  $f$  都没有垂直变化,即  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ . 这样定解问题可以

化成为一个二维问题.

(12)–(17)方程组及定解条件简化为:

$$\left. \begin{aligned} iRM_1 &= iKP + 2\omega_x M_2 - 2\omega_y M_3, \\ iRM_2 &= -\frac{dP}{dy} - 2\omega_x M_1, \\ iRM_3 &= 2\omega_y M_1, \\ iKM_1 &= \frac{dM_2}{dy}; \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\text{分界面条件: } y = 0 \text{ 时, } M_2 = iR\rho H, \quad (19)$$

$$P^I = P^{II}; \quad (20)$$

$$\text{边界条件: } y = \pm y_0 \text{ 时, } M_2 = 0. \quad (21)$$

考虑运动尺度较小,忽略了地球旋转因子随纬度的变化,即近似地取

$$\nabla(\omega) = 0, \quad [\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)]. \quad (22)$$

由实际估计,在取  $\nabla(\omega)$  为常数时,气旋切变稳定性增加,反气旋切变稳定性减弱,但影响不大(证明从略).

利用(22)式将(18)式消去  $P, M_1, M_3$ , 则得  $(R^2 - 4\omega_y^2) \frac{d^2 M_2}{dy^2} = K^2 R^2 M_2$ , 若  $R^2 - 4\omega_y^2 = 0$ , 则  $M_2 = 0$ , 就没有意义.

所以有

$$\frac{d^2 M_2}{dy^2} = \left( \frac{K^2 R^2}{R^2 - 4\omega_y^2} \right) M_2.$$

令

$$\frac{K^2 R^2}{R^2 - 4\omega_y^2} = T^2, \quad (23)$$

即有

$$\frac{d^2 M_2}{dy^2} = T^2 M_2. \quad (24)$$

定解問題(24), (19), (21)式的解:

分界面以北是

$$M_2^I = -\frac{iR^I H \rho^I}{ShT^I y_0} ShT^I(y - y_0), \quad (25)$$

分界面以南是

$$M_2^{II} = \frac{iR^{II} H \rho^{II}}{ShT^{II} y_0} ShT^{II}(y + y_0), \quad (26)$$

其中

$$R^I = (\sigma - KU^I), \quad T^I = \frac{K^2 R^I}{R^I - 4\omega_y^2}, \quad T^{II}, R^{II} \text{ 有类似的表达式.}$$

由(18)式消去  $M_1, M_3$ , 可得

$$P = i \left[ \left( \frac{4\omega_y^2}{R^I K^2} - \frac{R^I}{K^2} \right) \frac{dM_2}{dy} + \frac{2\omega_x}{K} M_2 \right]. \quad (27)$$

將(25), (26)式的結果代入(27)式, 再利用分界面的動力條件(20)式, 並在  $\rho^I = \rho^{II}$  的情況下, 得:

$$D^I R^I - A^I + B^I R^I = A^{II} - B^{II} R^{II} + D^{II} R^{II}, \quad (28)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A^I &= \frac{4\omega_y^2 H T^I}{K^2} \operatorname{ctgh} T^I y_0, \\ B^I &= \frac{H T^I}{K^2} \operatorname{ctgh} T^I y_0, \\ D^I &= \frac{2\omega_x H}{K}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$A^{II}, B^{II}, D^{II}$  有类似的表达式.

將  $R^I = \sigma - KU^I, R^{II} = \sigma - KU^{II}$  代入(28)式, 得  $\sigma$  的二次方程:

$$(B^I + B^{II})\sigma^2 + [D^I - D^{II} - 2K(B^I U^I + B^{II} U^{II})]\sigma + [B^I K^2 U^I + B^{II} K^2 U^{II} - D^I K U^I + D^{II} K U^{II} - A^I - A^{II}] = 0. \quad (30)$$

解的不穩定條件, 即  $\sigma$  有虛根的條件由(30)式得:

$$(U^I - U^{II})^2 T \operatorname{ctgh} T y_0 - 4\omega_x (U^I - U^{II}) - \frac{16\omega_y^2}{K^2} T \operatorname{ctgh} T y_0 > 0, \quad (31)$$

其中  $T^I \approx T^{II}$ , 且因  $T \operatorname{ctgh} T y_0 > 0$ , 因此(31)式可簡化為:

$$(U^I - U^{II})^2 > \frac{16\omega_y^2}{K^2} + \frac{4\omega_x}{T \operatorname{ctgh} T y_0} (U^I - U^{II}). \quad (32)$$

1. 對氣旋性切變 ( $U^I < U^{II}$ ) 不等式, (32)式可化為兩組聯立不等式:

1), 2) 證明均參見附錄(1), (2)式.

$$(U^{II} - U^I) < -\frac{2\omega_x}{T \operatorname{ctgh} T y_0} + \sqrt{\left(\frac{2\omega_x}{T \operatorname{ctgh} T y_0}\right)^2 + \left(\frac{4\omega_y}{K}\right)^2}, \quad (33)$$

$$(U^{II} - U^I) < -\frac{2\omega_x}{T \operatorname{ctgh} T y_0} - \sqrt{\left(\frac{2\omega_x}{T \operatorname{ctgh} T y_0}\right)^2 + \left(\frac{4\omega_y}{K}\right)^2};$$

$$(U^{II} - U^I) > -\frac{2\omega_x}{T \operatorname{ctgh} T y_0} + \sqrt{\left(\frac{2\omega_x}{T \operatorname{ctgh} T y_0}\right)^2 + \left(\frac{4\omega_y}{K}\right)^2}, \quad (34)$$

$$(U^{II} - U^I) > -\frac{2\omega_x}{T \operatorname{ctgh} T y_0} - \sqrt{\left(\frac{2\omega_x}{T \operatorname{ctgh} T y_0}\right)^2 + \left(\frac{4\omega_y}{K}\right)^2}.$$

当满足(33)式时, 出现  $U^{II} < U^I$ , 此与假定不符, 所以不考虑(33)式。

(34)式中由于  $T \operatorname{ctgh} T y_0 > 0$ , 第一式已包括了第二式。所以不稳定判据为:

$$U^{II} - U^I > -\frac{2\omega_x}{T \operatorname{ctgh} T y_0} + \sqrt{\left(\frac{2\omega_x}{T \operatorname{ctgh} T y_0}\right)^2 + \left(\frac{4\omega_y}{K}\right)^2}. \quad (35)$$

2. 在反气旋切变条件下  $U^{II} < U^I$ , 同样由(32)式可得判据为:

$$U^I - U^{II} > \frac{2\omega_x}{T \operatorname{ctgh} T y_0} + \sqrt{\left(\frac{2\omega_x}{T \operatorname{ctgh} T y_0}\right)^2 + \left(\frac{4\omega_y}{K}\right)^2}. \quad (36)$$

根据附录(1)可知, 在一般情况下,  $T$  近似地取决于波长, 所以由(35)、(36)式可以看出, 稳定度判据与切变、波长和纬度有关。切变愈大, 波长愈短愈不稳定。  $\omega_y$  总是稳定因子,  $\omega_x$  在反气旋切变时是稳定因子。稳定时的最大切变是波长和纬度的函数。

用(35)、(36)式可作图, 图2中虚线表示对应波长稳定时的最大反气旋切变, 实线表示对应波长稳定时的最大气旋切变。由图2可以看出, 气旋式切变不稳定所需切变要小, 且随纬度增加趋于不稳定。反气旋切变在  $35^\circ\text{N}$  左右最稳定。不稳定时所需切变随波长的增加而增加, 对于一般天气图上所常见的扰动而言, 其波长在500公里左右, 不稳定时所需的切变, 有时是可以达到的, 也就是可能不稳定的。

### 2. 相当正压层的扰动稳定性

将方程(12)与定解条件各项对扰动层求积分平均。用  $\bar{f} = \frac{1}{z_0} \int_0^{z_0} f dz$  表示,  $z_0$  为扰动层上界, 在积分时还用到以下条件:

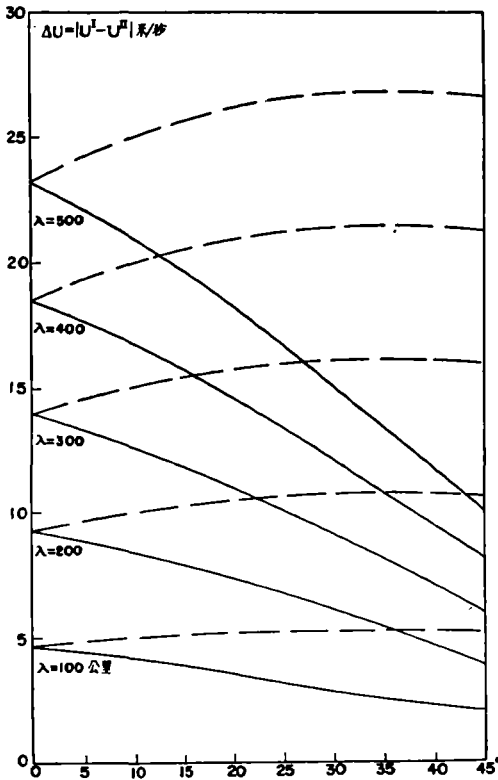


图2 在不同纬度与切变情况下的临界波长 (线以下为不稳定区, 线上方为稳定区)。

$$\begin{cases} M_3|_{z=0} = \rho\omega'|_{z=0} = 0, \\ P|_{z=0} = \alpha'\bar{P}, \alpha' \approx 1 \end{cases} \quad \begin{cases} M_3|_{z=z_0} = \rho\omega'|_{z=z_0} = 0, \\ P|_{z=z_0} = 0, \end{cases}$$

則得

$$\left. \begin{aligned} iR\bar{M}_1 &= iK\bar{P} + 2\omega_z\bar{M}_2 - 2\omega_y\bar{M}_3, \\ iR\bar{M}_2 &= -\frac{d\bar{P}}{dy} - 2\omega_z\bar{M}_1, \\ iR\bar{M}_3 &= 2\omega_y\bar{M}_1 + \alpha\bar{P}, \\ iK\bar{M}_1 &= \frac{d\bar{M}_2}{dy}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

其中

$$\alpha = \frac{\alpha'}{z_0};$$

$$\text{边界条件 } y = \pm y_0 \text{ 时, } \quad \bar{M}_2 = 0; \quad (38)$$

$$\text{分界面条件 } y = 0 \text{ 时, } \quad \bar{P}^I = \bar{P}^{II}, \quad (39)$$

$$\bar{M}_2 = iR\rho\bar{H}. \quad (40)$$

由(37)式消去  $\bar{M}_1, \bar{M}_3, \bar{P}$ , 則得

$$(R^2 - 4\omega_y^2) \frac{d^2\bar{M}_2}{dy^2} + 4\omega_y\omega_z\alpha \frac{d\bar{M}_2}{dy} - RK(2\omega_y\alpha + RK)\bar{M}_2 = 0. \quad (41)$$

定解問題(38)、(40)、(41)式的解:

在分界面以北有

$$\bar{M}_2^I = -iR^I\rho^I\bar{H} \frac{ShB^I(y-y_0)}{ShB^I y_0} e^{A^I y}. \quad (42)$$

在分界面以南有

$$\bar{M}_2^{II} = iR^{II}\rho^{II}\bar{H} \frac{ShB^{II}(y+y_0)}{ShB^{II} y_0} e^{A^{II} y}, \quad (43)$$

其中

$$A = \frac{-2\omega_y\omega_z\alpha}{R^2 - 4\omega_y^2},$$

$$B = \sqrt{A^2 + \frac{RK(2\omega_y\alpha + RK)}{R^2 - 4\omega_y^2}}.$$

当  $\alpha = 0$  时, 也就是不考虑地面扰动气压时, 与正压模式所得結果完全相同。由此可見, 相当正压模式只是增加了一个地面扰动气压的影响因子。

由(37)式消去  $\bar{M}_1, \bar{M}_3$ , 則得

$$\bar{P} = i \left[ \frac{2R\omega_z}{2\omega_y\alpha + RK} \bar{M}_2 - \frac{R^2 - 4\omega_y^2}{K(2\omega_y\alpha + RK)} \frac{d\bar{M}_2}{dy} \right]. \quad (44)$$

將(42)、(43)式代入(44)式, 再由分界面动力边界条件(39)式, 并考虑  $\rho^I = \rho^{II}$  的情况下得:

$$\begin{aligned} & \frac{2\omega_z R^{II^2}}{2\omega_y\alpha + R^{II}K} + \frac{4\omega_y^2 - R^{II^2}}{K(2\omega_y\alpha + R^{II}K)} R^{II}(A^{II} + B^{II} \operatorname{ctgh} B^{II} y_0) = \\ & = \frac{2\omega_z R^I}{2\omega_y\alpha + R^I K} + \frac{4\omega_y^2 - R^I{}^2}{K(2\omega_y\alpha + R^I K)} R^I(A^I - B^I \operatorname{ctgh} B^I y_0). \end{aligned} \quad (45)$$

因为  $\text{ctgh } By_0 \approx 1^D$ ,  $2\omega_y a \gg RK^2$ ,

所以(45)式简化为:

$$2K\omega_x R^I + 4D^I \omega_y^2 R^I - D^I R^I = 2K\omega_x R^{II} + 4D^{II} \omega_y^2 R^{II} - D^{II} R^{II}. \quad (46)$$

其中

$$\begin{cases} D^I = A^I - B^I \text{ctgh } B^I y_0, \\ D^{II} = A^{II} + B^{II} \text{ctgh } B^{II} y_0. \end{cases}$$

将  $R^I = K(c - U^I)$ ,  $R^{II} = K(c - U^{II})$ , 代入(46)式. 取  $U^I = -U^{II} = -U < 0 (U > 0)$ , 即考虑气旋性切变, 展开(46)式得:

$$c^3 + a'c^2 + b'c + c' = 0, \quad (47)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a' &= -3U \frac{D^I + D^{II}}{D^{II} - D^I}, \\ b' &= 3U^2 + \frac{8U\omega_x}{D^{II} - D^I} - \frac{4\omega_y^2}{K^2}, \\ c' &= 4\omega_y^2 U \frac{D^I + D^{II}}{(D^{II} - D^I)K^2} - U^3 \frac{D^I + D^{II}}{D^{II} - D^I}. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

令  $c_1 = c + \frac{a'}{3}$ , 代入(47)有

$$c_1^3 + dc_1 + q = 0, \quad (49)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} d &= b' - \frac{a'^2}{3}, \\ q &= \frac{2}{27} a'^3 - \frac{a'b'}{3} + c'. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

天气图上所能分析到的扰动, 其最小波长一般在 500 公里左右, 用一般参数代入(48)式后,  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  均为实数, 所以  $d$ ,  $q$  也为实数. 由实系数三次代数方程的根可知, 若有

$$\left(\frac{d}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 > 0,$$

则有一对共轭复根, 即这个不等式满足时,  $c$  有负虚部, 即有增幅波出现.

分别用各种不同参数代入(50)式, 取气旋性切变 ( $U^I = -U^{II} = -U < 0$ ); 且取流速(向西移动)比分界面以北的风速慢 5 米/秒, 即  $c - U^I = 5$  米/秒; 取扰动层厚度为一般赤道西风在太平洋区域所达高度即为  $z_0 = \frac{1}{3} \times 10^4$  米(700 毫巴左右)及  $\frac{1}{6} \times 10^4$  米(850 毫巴左右). 对于 200—1600 公里的波长, 5—30°N 地区进行了计算, 结果见图 3, 由图 3 可看出:

(1) 切变愈大, 最大不稳定波长愈长.  $U^I = -15$  米/秒;  $U^{II} = 15$  米/秒时, 最大不稳定波长在 1000 公里左右.

1), 2)证明可参见附录(3), (4).

(2) 不穩定波長在某個緯度出現極大值。如  $U^I = -10$  米/秒;  $U^{II} = 10$  米/秒時, 在  $25^\circ\text{N}$  出現不穩定波長極大值在 700 公里左右。圖 3 中虛線表示極大波長的連線。

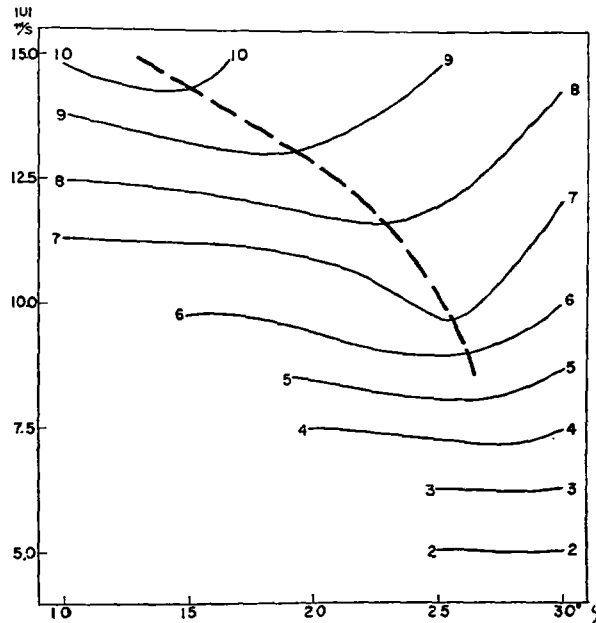


圖 3 不同緯度與切變情況下的臨界波長  
 綫上為穩定區, 綫下為不穩定區  
 (單位: 100 公里;  $z_0 = 1/3 \times 10^4$  米)

(3) 設扰动厚度為  $1/3 \times 10^4$  米與  $1/6 \times 10^4$  米時, 計算結果不穩定波長範圍與圖 3 中情況沒有顯著不同。

(4) 對所取參數, 在較短波長區域,  $B$  可能出現虛數情況, 這裡沒有進一步討論, 這是今後需要改進的地方。但當  $B$  為虛數時, 波長都較短, 對結果沒有根本性的影響。

(5) 比較圖 3 與圖 2 的結果指出, 相當正壓層比正壓層模式中的不穩定性增加了, 與實際情況較為接近。

### 3. 三維扰动穩定性的處理

正壓層扰动與相當正壓層扰动不穩定性的討論給出了一些有益的結論。雖然二者在趨勢上有一致的地方, 但是亦有一些不同, 主要表現為不穩定性在考慮整層時有所增加。這些不同反映了, 愈逼近於真實大氣的運動, 影響因子就愈加複雜, 並增加了不穩定性。

考慮分界面上三維切變扰动不穩定。從(12)式中消去  $M_1$ ,  $M_3$  和  $P$ , 則得

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( A_0 \frac{\partial^2 M_2}{\partial z^2} + B_0 \frac{\partial^2 M_2}{\partial y \partial z} + C_0 \frac{\partial M_2}{\partial z} + D_0 \frac{\partial M_2}{\partial y} + E_0 \right) = 0, \quad (51)$$

其中

$$\begin{aligned} A_0 &= 4RK\omega_x^2 + 4RK\omega_y\omega_x - R^3K, \\ B_0 &= 4RK\omega_y^2 + 4RK\omega_y\omega_x - R^3K, \\ C_0 &= -2R^2K^2\omega_x, \quad D_0 = 2R^2K^2\omega_x, \quad E = R^3K^3; \end{aligned}$$



或

$$A_0 \frac{\partial^2 M_2}{\partial x^2} + B_0 \frac{\partial^2 M_2}{\partial y \partial x} + C_0 \frac{\partial M_2}{\partial x} + D_0 \frac{\partial M_2}{\partial y} + E_0 = q(x). \quad (52)$$

$q(x)$  为积分所得之任意函数。

在  $q(x) = 0$  的情况下, 作线性变换:

$$\xi = y - \frac{B}{A}(x - x_0), \quad \eta = y.$$

则(52)式化为:

$$\frac{\partial^2 M_2}{\partial \xi \partial \eta} + G \frac{\partial M_2}{\partial \xi} + S \frac{\partial M_2}{\partial \eta} + E = 0, \quad (53)$$

其中

$$G = \frac{A_0}{B_0^2} \left( \frac{B_0 C_0}{A_0} - D_0 \right), \quad S = -\frac{A_0 D_0}{B_0^2}, \quad E = -\frac{A_0}{B_0^2} E_0.$$

边界条件  $\xi = \eta$  时,  $M_2 = 0.$  (54)

分界面条件  $\eta = 0$  时,

$$M_2 = iR\rho H, \quad (55)$$

$$P^I = P^{II}. \quad (56)$$

定解问题(53)–(56)式是常系数二阶双曲型方程的第一边值问题, 其边值(55)式是在特征线上给出的, 而边值(54)式是给在非特征线上。这样使我们难以用一般的方法求解。下面用迭代法求解:

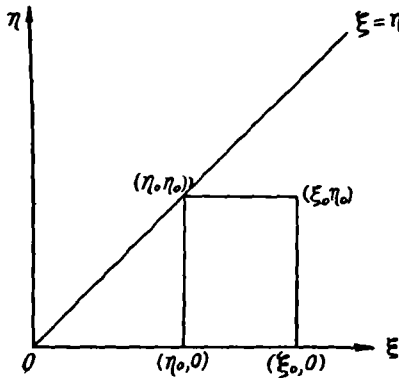


图 4

(53)式中令  $\frac{\partial M_2}{\partial \xi} = N$  得:

$$\frac{\partial N}{\partial \eta} + GN + S \frac{\partial M_2}{\partial \eta} + E = 0. \quad (57)$$

由边界条件可得(参阅图 4)

$$N(\xi_0, \eta_0) = -G \int_0^{\eta_0} N(\xi_0, r) dr - S \int_{\eta_0}^{\xi_0} N(r, \eta_0) dr + f(\xi_0, \eta_0), \quad (58)$$

$$f(\xi_0, \eta_0) = iRH \frac{\partial \rho}{\partial \xi_0} \Big|_{\eta_0=0} + iRSH\rho \Big|_{\eta_0=0} - E\eta_0. \quad (59)$$

所有  $(\xi_0, \eta_0)$  换成变量  $(\xi, \eta)$ , 用迭代法求解公式为:

$$N_n(\xi, \eta) = -G \int_0^\eta N_{n-1}(\xi, r) dr - S \int_\eta^\xi N_{n-1}(r, \eta) dr + f(\xi, \eta) \quad (60)$$

$(n = 1, 2, 3, \dots).$

取  $N_0 = f(\xi, \eta)$ , 可证明此迭代是收敛的<sup>1)</sup>。其中用到  $\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \Big|_{\eta=0}$ ,  $\rho \Big|_{\eta=0}$  的条件, 可近似在多元大气的假定下给出。

1) 证明参见附录(5)。

$N(\xi, \eta)$  求出后, 由

$$M_2 = \int_{\eta}^{\xi} N(r, \eta) dr$$

求出  $M_2(\xi, \eta)$ .

由(12)式中第一、三、四式消去  $M_1, M_3$  可得:

$$\left( \frac{iR}{2\omega_y} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2iK \frac{\partial}{\partial z} - \frac{iRK^2}{2\omega_y} \right) P - \left[ 2\omega_z \frac{\partial}{\partial z} + \left( 2\omega_y - \frac{R^2}{2\omega_y} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\omega_z}{\omega_y} RK \right] M_2 = 0, \quad (61)$$

$$\text{边界条件} \quad P(y, z_0) = 0, \quad (62)$$

$$P(0, 0) = B |U^{II} - U^I|. \quad (63)$$

其中边界条件(63)假定在分界面上, 地面扰动气压和切变的绝对值成正比。

当  $M_2$  已求出后, 代入(61)式, 则定解问题(61)–(63)式可看作常系数二阶常微分方程的求解问题。同样对分界面两边求出的扰动气压  $P$ , 用分界面动力边界条件(56)连接可得特征值的方程, 由此可得不稳定条件。由于计算的工作量过于繁重, 在此仅列出求解办法, 留待以后参考, 而不给出具体解答。当然由于方程较为复杂, 各因子间的交互影响较多, 其中还有些物理问题需在运算中改进。

#### 四、值得讨论的几个问题

(1) 在本文所用的基本方程里, 保留了和  $\omega_y$  (水平地转涡度) 有关的项, 因为在低纬度  $\omega_y$  很大, 而  $\omega_x$  很小, 相差可达一个量级。所以扰动方程中类似  $\omega_x m_2$  的项的量级可能与  $\omega_y m_3$  的量级相同。

在正压层模式中, 对气旋性切变时的稳定度判据(35)式来讲,  $\omega_y$  是稳定因子。当略去  $\omega_x$  时, 运动总是不稳定的, 只有当  $\omega_y$  存在时, 运动才是条件性不稳定的。对反气旋切变而言[判据(36)式],  $\omega_y, \omega_x$  都是稳定因子。

在相当正压层模式里, 由于判据比(35), (36)式要复杂的多, 有  $\omega_y \omega_x$  相乘的项, 不能直接看出  $\omega_y \omega_x$  是稳定因子, 还是不稳定因子。但从方程(37)式中略去  $\omega_y$  或  $\omega_x$ , 则运动都是不稳定的<sup>1)</sup>, 由此亦可推知, 条件稳定的性质是与  $\omega_y$  有关的。

(2) 对扰动的不稳定有许多物理解释, 有利用角动量守恒情况下, 流点受扰动至新位置的受力方向, 位能的大小, 涡旋在非均匀涡度场中的受力方向<sup>[2]</sup>等方面, 说明其不稳定的意义。这些解释说明了一定的物理问题, 但都把所考虑的系统看成封闭的, 这一般是与事实不符的。在这里试图对波动不稳定的解释作一新的尝试。

方程(6)式写成矢量形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{m}}{dt} &= -\nabla p' - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}, \\ \mathbf{m} &= (m_1, m_2, m_3), \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

1) 证明从略。

对(64)式取旋度得:

$$\frac{d}{dt} \text{rot } \mathbf{m} = -2[(\mathbf{m} \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)\mathbf{m} + \omega \text{ div } \mathbf{m}], \quad (65)$$

由(6)式中第四式可知  $\text{div } \mathbf{m} = 0$ , 若略去  $\omega$  随纬度的变化, 即设  $\nabla(\omega) = 0$  则(65)式简化为:

$$\frac{d}{dt} \text{rot } \mathbf{m} = 2(\omega \cdot \nabla)\mathbf{m}.$$

考虑  $(\text{rot } \mathbf{m})_x = \zeta_x$  及  $\omega_x = 0$ , 则上式化为:

$$\frac{d}{dt} \zeta_x = 2\left(\omega_y \frac{\partial m_3}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial m_3}{\partial z}\right). \quad (66)$$

考虑以  $C_R$  东西向运动的波动系统, 系统涡度变化为

$$\frac{D\zeta_x}{Dt} = (C_R - U) \frac{\partial \zeta_x}{\partial x} + 2\left(\omega_y \frac{\partial m_3}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial m_3}{\partial z}\right). \quad (67)$$

由(18)和(12)式及模式 I, II 的解  $M_2$  及  $\bar{M}_2$  可以看出, 当  $\sigma$  为实数时,  $m_2$  与  $\eta$  位相差  $90^\circ$ ,  $m_2$  与  $m_3$  同位相,  $m_1$  与  $m_2$  位相差  $90^\circ$ , 所以  $\frac{\partial m_3}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial m_3}{\partial z}$  与  $\eta$  位相差  $90^\circ$ ,  $\frac{\partial \zeta_x}{\partial x}$  与  $\eta$  位相差  $90^\circ$ , 这样由(67)式可知, 当  $\sigma$  为实数时,  $\frac{D\zeta_x}{Dt}$  的位相总是与波形差  $90^\circ$ . 只有  $\sigma$  为虚数时, 才可能使涡度变化与波形一致, 也就是造成波动不稳定.

(3) 特征方程(30)、(45)求解的过程中, 曾作若干简化, 减少了方程的复杂性, 降低了次数, 使求解成为可能, 但因此不免过分的简化了问题. 大气中实际的不稳定性发展过程, 是远较本文所讨论者为复杂的.

(4) 台风发生、发展的因子是很多的, 如热力场、水汽等都应加以考虑. 大多数台风发生于南北纬  $5-25^\circ$  的大洋上, 而很少在更高的纬度发生<sup>[3]</sup>, 其原因过去人们归结于海水温度不够高, 所以空气暖湿程度不够. 由本文所得的对相当正压层扰动稳定度的结论可知, 不稳定的切变波长在某个纬度出现极大值, 在一定程度上这可能反映大多数台风发生于此纬度带的动力条件. 本文完全没有考虑上层东风对台风发生的影响是一个缺点.

致謝: 在本文研究过程中, 得到北京大学数学力学系萧树铁、廖可仁和地球物理系杨大升、陈受钧等同志的帮助, 謹此表示衷心的感谢.

## 附 录

### (1) 对 $T$ 的估计

由(38)式可知

$$T^I = \frac{K^2 R^{I^2}}{R^{I^2} - 4\omega_y^2}, \quad T^{II} = \frac{K^2 R^{II^2}}{R^{II^2} - 4\omega_y^2}.$$

其中  $R = \sigma - KU$ ,  $K = \frac{2\pi}{\lambda}$  代入  $T$  后得:

$$T = K^2 \frac{\left(\sigma - 2\pi \frac{U}{\lambda}\right)^2}{\left(\sigma - 2\pi \frac{U}{\lambda}\right)^2 - 4\omega_y^2}.$$

取一般参数  $\sigma = \frac{-\pi}{\text{日}} = -3.64 \times 10^{-5}/\text{秒}$ ,  $\frac{U}{\lambda} \sim \left(1 \sim \frac{2}{5} \times 10^{-4}\right)/\text{秒}$ ,  $\omega_y = \omega \cos 10^\circ \sim 7.18 \times 10^{-5}/\text{秒}$ .

則当  $U > 0$  时,

$$\left(\sigma - 2\pi \frac{U}{\lambda}\right)^2 = \left[-3.64 \times 10^{-5} - 6.28 \times \left(1 \sim \frac{2}{5}\right) \times 10^{-4}\right]^2 = (44.1 \sim 8.29) \times 10^{-8}/\text{秒}^2,$$

$U < 0$  时,

$$\left(\sigma - 2\pi \frac{U}{\lambda}\right)^2 = \left[-3.64 \times 10^{-5} + 6.82 \times \left(1 \sim \frac{2}{5}\right) \times 10^{-4}\right]^2 = (35.1 \sim 4.62) \times 10^{-8}/\text{秒}^2,$$

而  $4\omega_y^2 \approx 2.06 \times 10^{-8}/\text{秒}^2$ .

所以

$$\left(\sigma - 2\pi \frac{U}{\lambda}\right)^2 \gg 4\omega_y^2, \\ T^2 \approx K^2, \quad T^1 \approx T^{II}.$$

(2)  $T \operatorname{ctgh} T y_0$  的符号

由附录(1)可知,  $T = \pm K$  是实数,  $y > 0$  是实数, 所以  $T \operatorname{ctgh} T y_0 > 0$ .

(3)  $\operatorname{ctgh} B y_0$  的估計

由实际参数代入后,  $B$  有  $10^0$  量級.  $y_0$  是扰动水平范围(南北), 取  $y_0 \approx 10^5 \sim 10^6$  米, 則  $\operatorname{ctgh} B y_0 \approx 1$ .

(4)  $2\omega_y \alpha \gg RK$

一般取扰动层厚度  $z_0$  为  $\left(\frac{1}{6} \sim \frac{1}{3}\right) \times 10^4$  米,  $\alpha = \frac{1}{z_0}$ , 所以  $2\omega_y \alpha \sim 2 \times 7.29 \times (3 \sim 6) \times 10^{-9} \sim (43.8 \sim 87.5) \times 10^{-10}$ ,  $\lambda \sim 5 \times 10^5$ ,  $R = K(C - U)$ ,

$$C - U^I \sim 5 \text{ 米/秒}, \quad C - U^{II} \sim -20 \text{ 米/秒},$$

所以

$$RK \sim (16.1 \sim 64.3) \times 10^{-10},$$

$$2\omega_y \alpha \gg RK.$$

(5) 迭代收斂的証明

証明(60)式迭代收斂, 即証明叙列  $\{N_n(x, y)\}$  对  $x, y$  一致收斂, 为此只需証:  $r_n(x, y) = N_n(x, y) - N_{n-1}(x, y)$  一致趋于零. 由(60)式知  $r_n$  满足方程:

$$r_n(x, y) = -G \int_0^y r_{n-1}(x, \eta) d\eta - S \int_y^x r_{n-1}(\xi, y) d\xi.$$

令  $K = \max\{|f|, G, S\}$ , 这一有界假定实际是滿足的, 由上式和(60)式可知

$$|r_2| \leq \frac{K^3 2^2}{2!} (x+y)^2, \quad |r_3| \leq K \left[ \frac{K^3 2^3}{3!} (x+y)^3 \right].$$

用数学归纳法可証:

$$|r_n| \leq K \left[ \frac{K^n 2^n (x+y)^n}{n!} \right], \text{ 它当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, 对 } x, y \text{ 有一致地趋于零. 所以有}$$

$$N(\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} N_n(\xi, \eta).$$

## 参 考 文 献

- [1] 谢义炳, 陈受鈞, 张一良, 黄寅亮, 气象学报, 33(1963), 200—217.  
[2] C. C. Lin, Theory of Hydrodynamic stability, Chapter 4, Cambridge University.  
[3] H. Richl, 热带气象学, 第十一章, 科学出版社, 1958.

## A PRELIMINARY THEORETICAL STUDY ABOUT THE INSTABILITY OF THE WAVES ALONG THE INTERTROPICAL CONVERGENCE ZONE

HSIEH YI-PING HUANG YIN-LIANG  
(Peking University)

## ABSTRACT

In this paper, the instability of the waves along the intertropical convergence zones is studied by means of three models: the barotropic model, the equivalent barotropic model and the three dimensional model. Analytical and numerical solutions are given for the first and the second models respectively. A possible approach for the solution of the last model is suggested. The result shows that the instability is related to the shear of basic currents, the latitude and the wave length.  $2\omega \cos \varphi$  has been shown to be a stability factor. It has been also shown that the factors neglected in simpler models may lead to increase the instability. It gives a preliminary theoretical prove for the quite well-known synoptic experience that the transformation of the kinetic energy of the basic currents to the eddy energy of the vortices may not be considered as an unimportant mechanism for the initiation of typhoons.