正压預报模式的一个新型計算方案*

丑紀范　周紫东　杜行远
(中央气象局气象科学研究所)

提　　要

用积分关系法和盖略金法，求解球面坐标中的正压預报方程和平衡方程. 引入南北半球对称的假定，避免了引入人为边界条件，从而扩大了有效的預报区域，并使預报中等压面的平均高度不变.

在預报方程中，还特别考虑了实际爬越地形的风向和 500 毫巴面上的风向差别.

一

近年来在数值解法中，苏联 A. A. Дородницын 提出了一个新的方法——积分关系法，在空气动力学的計算中，收到了很大的成效. A. A. Дородницын 強調指出："这个方法解非綫性混合型方程特别有意义，并能在网格很粗的情况下得到精确度很高的解"[1,2]，但是，直到本工作完成的时候，我們才見到刚刚发表的将积分关系法应用于天气預报的工作[3,4]，而且都是用的平面坐标系，其中一篇[3] 对四个自变数都用积分关系法，結果得到一个阶数很高的代数方程組，另一篇[4]则只在垂直方向用积分关系法.

根据气象問題的特点，我們将天气預报方程写在球面坐标 (ϑ, λ) 中，在余緯 ϑ 方向将用积分关系法，化为对經度 λ 的常微分方程組，再用 Б. Г. Галеркин 法[5]解这个方程組，以三角函数作为坐标元素，卽用調和分析把每一緯圈上的流場，高度場和地形都展开成簡諧波，将常微分方程組轉化成諸富氏系数間的代数方程組.

从表面上看来，迄今为止，所发表的用积分关系法解的問題，都是有若干个未知函数，但只包含对自变量的一次微商的偏微分方程組，我們現在的問題是只有一个未知函数的高阶偏微分方程，实际上，这并沒有本质上的差异，要知道，只要将高次微商看成一个新的未知函数，一个未知函数的高阶偏微分方程就变为有若干个未知函数，但只包含对自变量的一次微商的偏微分方程組了. 本文将不严格仿照其进行，如下面的方法，实质上是一样的，然而簡便得多.

設　$\psi = \psi(\vartheta, \lambda)$ 为某一函数，而　$\psi|_{\vartheta=0} = \psi_0$.

如

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = F(\vartheta, \lambda) \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \tag{1}$$

以 $m+2$ 个点 $0, \vartheta_1, \vartheta_2, \cdots \vartheta_m, \pi$ 将 $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$ 分为 $m+1$ 个区間，設 $\mathfrak{L}_m^{(k)}(\vartheta)$ 为一組选定的插値多項式[6]，卽

* 本文 1962 年 12 月 8 日收到，1963 年 4 月 6 日收到修改稿.

$$\mathfrak{L}_m^{(k)}(\vartheta)|_{\vartheta=\vartheta_r}=\delta_{kr}=\begin{cases}1 & 如\ k=r,\\ 0 & 如\ k\neq r,\end{cases}$$

$$r,k=1,2,\cdots m.$$

令

$$F(\vartheta,\lambda)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\bigg|_k\mathfrak{L}_m^{(k)}(\vartheta),\tag{2}$$

代入(1)式并对 ϑ 由 0 到 ϑ_k 积分即得 m 个积分关系式：

$$\psi_k-\psi_0=\sum_{s=1}^{m}\tilde{\sigma}_{ks}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)_s.\tag{3}$$

这里

$$\tilde{\sigma}_{ks}=\int_0^{\vartheta_k}\mathfrak{L}_m^{(s)}(\vartheta)\,d\vartheta\quad 为一組常数,\tag{4}$$

$$k=1,2,\cdots,m.$$

設
$$\begin{pmatrix}\tilde{\sigma}_{11}, \tilde{\sigma}_{12}\cdots\tilde{\sigma}_{1m}\\ \tilde{\sigma}_{21}\ \ \tilde{\sigma}_{22}\cdots\tilde{\sigma}_{2m}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \tilde{\sigma}_{m1}\ \ \tilde{\sigma}_{m2}\cdots\tilde{\sigma}_{mm}\end{pmatrix}\ 的逆矩陣为\ \begin{pmatrix}\sigma_{11}\ \ \sigma_{12}\cdots\sigma_{1m}\\ \sigma_{21}\ \ \sigma_{22}\cdots\sigma_{2m}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sigma_{m1}\ \ \sigma_{m2}\cdots\sigma_{mm}\end{pmatrix},$$

可将(3)式改写为

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)_k=\sum_{s=1}^{m}\delta_{ks}^{(1)}(\psi_s-\psi_0).\tag{5}$$

这里 $\delta_{ks}^{(1)}=\sigma_{ks}$.

由于以下要考虑的方程的特点，其中的函数将满足条件

$$\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\bigg|_{\vartheta=0}=0.\tag{6}$$

利用条件(6)，对二次偏微商可类似的得

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2}\right)_k=\sum_{s=1}^{m}\delta_{ks}^{(2)}(\psi_s-\psi_0).\tag{7}$$

这里

$$\delta_{ks}^{(2)}=\sum_{r=1}^{m}\sigma_{kr}\sigma_{rs}.$$

同样可得

$$\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial\vartheta^3}\right)_k=\sum_{s=1}^{m}\delta_{ks}^{(3)}(\psi_s-\psi_0).\tag{8}$$

这里

$$\delta_{ks}^{(3)}=\sum_{r=1}^{m}\sum_{q=1}^{m}\sigma_{kq}\sigma_{qr}\sigma_{rs}.$$

(5)，(7)，(8)式就是我們要用到的积分关系式.

二

业务預报实践表明：考虑地形，摩擦，整层大气輻散以及平衡方程的正压預报模式，用

于500毫巴等压面上效果是比較好的[7],这时預报方程可写如下[1]:

$$(\Delta-\mu_0^2)\frac{\partial\psi}{\partial t}=-J(\psi,\ \mu_1^2\Delta\psi+f)-\mu_2^2\Delta\psi-$$
$$-\mu_3^2\mathbf{K}\cdot\nabla\psi\times\nabla h-\mu_4^2\nabla\psi\cdot\nabla h,\tag{9}$$

ψ 为流函数, h 为地形高度, $f=2\omega\cos\vartheta$ 为地轉参数. $\mathbf{K}$ 为垂直方向单位向量.

$$\begin{cases}\Delta=\dfrac{1}{R^2\sin\vartheta}\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}+\dfrac{1}{R^2\sin^2\vartheta}\dfrac{\partial^2}{\partial\lambda^2},\\ J(A,\ B)=\dfrac{1}{R^2\sin\vartheta}\left(\dfrac{\partial A}{\partial\vartheta}\dfrac{\partial B}{\partial\lambda}-\dfrac{\partial A}{\partial\lambda}\dfrac{\partial B}{\partial\vartheta}\right),\\ \nabla=\left(\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial\vartheta},\ \dfrac{1}{R\sin\vartheta}\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\right).\end{cases}$$

方程(9)中,参数 μ_0^2 考虑整层大气輻散效应[8], μ_1^2 考虑大气平均风速和500毫巴风速間的差异[9], μ_2^2 考虑摩擦作用. 由于地面边界层摩擦作用,实际爬越地形的风速,风向都不同于500毫巴上的风速和风向,参数 μ_3^2 和 μ_4^2 就是考虑它們之間的差异的.

为了減小計算誤差,将預报方程(9)展开,使微分号內沒有三角函数,使分母上沒有正弦函数,然后将預报方程(9)依次写在緯圈 k 上, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ m$, 对 ϑ 的偏微商都用型如(5),(7),(8)的积分关系式代入,考虑到球面的特点,有

$\dfrac{\partial\psi_0}{\partial\lambda}=0$, 得到如下的常微分方程組:

$$\sum_{r=1}^{m}\alpha_{kr}(\psi_r'-\psi_0')-R^4\sin^4\vartheta_k\mu_0^2\psi_0'+R^2\sin^2\vartheta_k\frac{d^2\psi_k'}{d\lambda^2}=$$
$$=-\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\beta_{krs}(\psi_r-\psi_0)\frac{d\psi_s}{d\lambda}-\mu_1^2\sin\vartheta_k\frac{d^3\psi_k}{d\lambda^3}\sum_{r=1}^{m}\delta_{kr}^{(1)}(\psi_r-\psi_0)+$$
$$+\sum_{r=1}^{m}\gamma_{kr}\frac{d^2\psi_r}{d\lambda^2}\cdot\frac{d\psi_k}{d\lambda}-\sum_{r=1}^{m}\varepsilon_{kr}(\psi_r-\psi_0)-\mu_2^2R^2\sin^2\vartheta_k\frac{d^2\psi_k}{d\lambda^2}-$$
$$-2\omega R^2\sin^4\vartheta_k\frac{d\psi_k}{d\lambda}-R^2\mu_3^2\sin^3\vartheta_k\sum_{r=1}^{m}\delta_{kr}^{(1)}\left((\psi_r-\psi_0)\frac{dh_k}{d\lambda}-\right.$$
$$\left.-(h_r-h_0)\frac{d\psi_k}{d\lambda}\right)-R^2\mu_4^2\sin^2\vartheta_k\frac{d\psi_k}{d\lambda}\frac{dh_k}{d\lambda}-$$
$$-R^2\mu_4^2\sin^4\vartheta_k\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\delta_{kr}^{(1)}\delta_{ks}^{(1)}(\psi_s-\psi_0)(h_r-h_0),\tag{10}$$
$$k=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

其中
$$\begin{cases}\alpha_{kr}=R^2\sin^4\vartheta_k(\delta_{kr}^{(2)}+\cot\vartheta_k\delta_{kr}^{(1)}-R^2\mu_0^2\delta_{kr}),\\ \beta_{krs}=\mu_1^2\sin^3\vartheta_k\delta_{kr}^{(1)}\delta_{ks}^{(2)}+\mu_1^2\cos\vartheta_k\sin^2\vartheta_k\delta_{kr}^{(1)}\delta_{ks}^{(1)}-\\ \qquad-\mu_1^2\delta_{ks}\sin\vartheta_k(\sin^2\vartheta_k\delta_{kr}^{(3)}+\cos\vartheta_k\sin\vartheta_k\delta_{kr}^{(2)}-\delta_{kr}^{(1)}),\\ \gamma_{kr}=\mu_1^2\sin\vartheta_k\delta_{kr}^{(1)}-2\mu_1^2\delta_{kr}\cos\vartheta_k,\\ \varepsilon_{kr}=\mu_2^2R^2\sin^3\vartheta_k(\sin\vartheta_k\delta_{kr}^{(2)}+\cos\vartheta_k\delta_{kr}^{(1)}).\end{cases}$$

1) (9)式的推导可参考上期气象学报297—304頁.

用 Б. Г. Галеркин 法[5] 解此常微分方程組，以三角函数作为坐标元素. 卽每一緯圈上的流場和地形場都用調和分析展开，

$$
\begin{cases}
\psi_k - \psi_0 = \dfrac{1}{2} a_{k0} + \sum\limits_{i=1}^{n} (a_{ki} \cos i\lambda + b_{ki} \sin i\lambda), & (11) \\
\psi'_k - \psi'_0 = \dfrac{1}{2} a'_{k0} + \sum\limits_{i=1}^{n} (a'_k \cos i\lambda + b'_{ki} \sin i\lambda), & (12) \\
h_k - h_0 = \dfrac{1}{2} \tilde{a}_{k0} + \sum\limits_{i=1}^{n} (\tilde{a}_{ki} \cos i\lambda + \tilde{b}_{ki} \sin i\lambda), & (13)
\end{cases}
$$

$$k = 1,\ 2,\ \cdots m.$$

(12)式中左上角一撇表示对时間的偏微商，将展开式(11)—(13)代入常微分方程組(10)中，再以 $\cos l\lambda$, $\sin l\lambda$, $l = 0, 1, 2, \cdots n$, 依次乘每一方程，由 0 至 2π 对 λ 积分，利用三角函数所特有的乘积化为和差的性質和它們在 $(0, 2\pi)$ 間的正交性，就分别得到 a'_{kl}, b' 方程，$k = 1, 2, \cdots m$, $l = 1, 2, \cdots n$,

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{r=1}^{m} (a_{kr} - \delta_{kr} R^2 \sin^2 \vartheta_k \cdot l^2) a'_{rl} - R^4 \sin^4 \theta_k \mu_0^2 \delta_{0l} \psi'_0 = \\
\quad = \sum\limits_{r=1}^{m} (\delta_{kr} \mu_2^2 R^2 \sin^2 \vartheta_k l^2 - \varepsilon_{kr}) a_{rl} - 2\omega R^2 \sin^4 \vartheta_k b_{kl} + \\
\quad + \sum\limits_{r} \sum\limits_{s} \sum\limits_{i} \sum\limits_{j} [L_{krs}^{lij} a_{ri} b_{sj} + M_{krs}^{lij} b_{ri} a_{sj} + \\
\quad + N_{krs}^{lij} a_{ri} \tilde{a}_{sj} + P_{krs}^{lij} b_{ri} \tilde{b}_{sj} + Q_{krs}^{lij} (a_{ri} \tilde{b}_{sj} - \\
\quad - \tilde{a}_{ri} b_{sj}) + S_{krs}^{lij} (b_{ri} \tilde{a}_{sj} - \tilde{b}_{ri} a_{sj})], & (14) \\
\sum\limits_{r=1}^{m} (a_{kr} - \delta_{kr} R^2 \sin^2 \vartheta_k l^2) b'_{rl} = \sum\limits_{r=1}^{m} (\delta_{kr} \mu_2^2 R^2 \sin^2 \vartheta_k l^2 - \\
\quad - \varepsilon_{kr}) b_{rl} + 2\omega R^2 \sin^4 \vartheta_k a_{kl} + \sum\limits_{r} \sum\limits_{s} \sum\limits_{i} \sum\limits_{j} [\tilde{L}_{krs}^{lij} a_{ri} a_{sj} + \\
\quad + \tilde{M}_{krs}^{lij} b_{ri} b_{sj} + \tilde{N}_{krs}^{lij} a_{ri} \tilde{b}_{sj} + \tilde{P}_{krs}^{lij} b_{ri} \tilde{a}_{sj} + \\
\quad + \tilde{Q}_{krs}^{lij} (a_{ri} \tilde{a}_{sj} - \tilde{a}_{ri} a_{sj}) + \tilde{S}_{krs}^{lij} (b_{ri} \tilde{b}_{sj} - \tilde{b}_{ri} b_{sj}). & (15)
\end{cases}
$$

对于 $l = 0$,(这时諸 b'_{k0}, b_{k0}, $\tilde{b}_{k0}$ 均为零)，可将(14)式中 l 取为零，但右端第三項需乘 2.

$$
\begin{cases}
L_{krs}^{lij} = \dfrac{1}{2} (\gamma_{kr} \delta_{ks} i^2 + \mu_1^2 \sin \vartheta_k \delta_{kr}^{(1)} \delta_{rs} j^2 - \beta_{krs}) j E_{lij}, \\
M_{krs}^{lij} = \dfrac{1}{2} (\gamma_{kr} \delta_{ks} i^2 - \mu_1^2 \sin \vartheta_k \delta_{kr}^{(1)} \delta_{ks} j^2 + \beta_{krs}) j F_{lij}, \\
N_{krs}^{lij} = -\dfrac{1}{2} R^2 \mu_4^2 \sin^2 \vartheta_k (\delta_{kr} \delta_{ks} ij F_{lij} + \sin^2 \vartheta_k \delta_{kr}^{(1)} \delta_{ks}^{(1)} E_{lij}), \\
P_{krs}^{lij} = -\dfrac{1}{2} R^2 \mu_4^2 \sin^2 \vartheta_k (\delta_{kr} \delta_{ks} ij E_{lij} + \sin^2 \vartheta_k \delta_{kr}^{(1)} \delta_{ks}^{(1)} F_{lij}), \\
Q_{krs}^{lij} = -\dfrac{1}{2} \mu_3^2 R^2 \sin^3 \vartheta_k \delta_{kr}^{(1)} \delta_{ks} j E_{lij},
\end{cases}
$$

其中
$$\left\{\begin{aligned}
S_{krs}^{lij} &= \frac{1}{2}\mu_3^2 R^2 \sin^3\vartheta_k \delta_{kr}^{(1)}\delta_{rs} j F_{lij},\\
\widetilde{L}_{krs}^{lij} &= \frac{1}{2}(\gamma_{kr}\delta_{ks} i^2 - \mu_1^2 \sin\vartheta_k \delta_{ks}\delta_{kr}^{(1)} j^2 + \beta_{krs}) j H_{lij},\\
\widetilde{M}_{krs}^{lij} &= \frac{1}{2}(-\gamma_{kr}\delta_{ks} i^2 + \mu_1^2 \sin\vartheta_k \delta_{ks}\delta_{kr}^{(1)} j^2 - \beta_{krs}) j G_{lij},\\
\widetilde{N}_{krs}^{lij} &= \frac{1}{2} R^2 \mu_4^2 \sin^2\vartheta_k (\delta_{kr}\delta_{ks} i j G_{lij} - \sin^2\vartheta_k \delta_{kr}^{(1)}\delta_{ks}^{(1)} H_{lij}),\\
\widetilde{P}_{krs}^{lij} &= \frac{1}{2} R^2 \mu_4^2 \sin^2\vartheta_k (\delta_{kr}\delta_{ks} i j H_{lij} - \sin^2\vartheta_k \delta_{kr}^{(1)}\delta_{ks}^{(1)} G_{lij}),\\
\widetilde{Q}_{krs}^{lij} &= \frac{1}{2}\mu_3^2 R^2 \sin^3\vartheta_k \delta_{kr}^{(1)}\delta_{ks} j H_{lij},\\
\widetilde{S}_{krs}^{lij} &= -\frac{1}{2}\mu_3^2 R^2 \sin^3\vartheta_k \delta_{kr}^{(1)}\delta_{ks} j G_{lij}.
\end{aligned}\right.$$

这里引入四个符号：

$$E_{lij} = \begin{cases}1\\1\\1\\0;\end{cases} \quad F_{lij} = \begin{cases}1\\1\\-1\\0;\end{cases} \quad G_{lij} = \begin{cases}1\\-1\\1\\0;\end{cases} \quad H_{lij} = \begin{cases}-1 & \text{当 } i-j=l\\ 1 & i-j=-l\\ 1 & i+j=l\\ 0 & \text{其它.}\end{cases}$$

如果不計 ψ_0'，則方程組 (14), (15) 的方程个数和未知数 a_{kl}', b_{kl}' 一样多，这是关于 $m(n+1)$ 个未知数 a_{kl}' 和 $m\times n$ 个未知数 b_{kl}' 的 $n+1$ 和 n 个 m 阶的綫性代数方程組，下面我們将看到对北半球預报 m 不需要取得很大，例如可取 $m=7$，易見 7 阶的綫性代数方程組，不难得到精确度很高的解[6]。

但是，现在 ψ_0' 是不知道的，而 ψ 在北极上的值实际上变化很大，而且北极附近的天气系統是移动的，对中緯度天气影响很大，我們需要确定出 ψ_0' 来，为此，我們再导出一个关系式，将(9)式对整个球面积分，得：

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\Delta-\mu_0^2)\frac{\partial\psi}{\partial t}\sin\vartheta\,d\lambda\,d\vartheta &= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} J(\psi,\mu_1^2\Delta\psi+f)\sin\vartheta\,d\lambda\,d\vartheta -\\
&- \mu_2^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Delta\psi\sin\vartheta\,d\lambda\,d\vartheta - \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\mu_3^2\mathbf{k}\cdot\nabla\psi\times\nabla h)\sin\vartheta\,d\lambda\,d\vartheta -\\
&- \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mu_4^2\nabla\psi\cdot\nabla h\sin\vartheta\,d\lambda\,d\vartheta.
\end{aligned} \tag{16}$$

易見：

$$\left\{\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Delta\frac{\partial\psi}{\partial t}\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\lambda = 0,\\
&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Delta\psi\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\lambda = 0,\\
&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}J(\psi,\mu_1^2\Delta\psi+f)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\lambda = 0,\\
&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\mu_3^2\mathbf{k}\cdot\nabla\psi\times\nabla h)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\lambda = 0.
\end{aligned}\right.$$

于是(16)式为：

$$\mu_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\partial\psi}{\partial t}\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\lambda=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mu_4^2\nabla\psi\cdot\nabla h\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\lambda. \tag{17}$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial t}=\sum\limits_{s=0}^{m}\psi_s'\mathfrak{L}_m^{(s)}(\vartheta),\\ \nabla\psi\cdot\nabla h=\sum\limits_{s=0}^{m}(\nabla\psi\cdot\nabla h)_{\vartheta=\vartheta_s}\mathfrak{L}_m^{(s)}(\vartheta),\end{cases}$$

而 $(\nabla\psi\cdot\nabla h)_{\vartheta=\vartheta_s}=\dfrac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\Big|_s\cdot\dfrac{\partial h}{\partial\vartheta}\Big|_s+\dfrac{1}{\sin^2\vartheta_s}\dfrac{\partial\psi}{\partial\lambda}\Big|_s\cdot\dfrac{\partial h}{\partial\lambda}\Big|_s.$

以(5),(11),(12),(13)式代入(17)式,积分后即得：

$$\psi_0'=\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{m}c_k}\Big\{-\sum_{k=1}^{m}c_ka_{0k}'+\frac{\mu_4^2}{\mu_0^2}\Big\{\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}c_k^*i^2(a_{ki}\tilde{a}_{ki}+b_{ki}\tilde{b}_{ki})+$$
$$+\sum_{k=0}^{m}\sum_{s=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\tilde{c}_{ksr}\Big[2a_{s0}\tilde{a}_{r0}+\sum_{i=1}^{n}(a_{si}\tilde{a}_{ri}+b_{si}\tilde{b}_{ri})\Big]\Big\}\Big\}. \tag{18}$$

这里 c_k, c_k^*, $\tilde{c}_{ksr}$ 为常数，

$$\begin{cases}c_k=\int_0^{\pi}\mathfrak{L}_m^{(k)}(\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta,\\ c_k^*=\int_0^{\pi}\mathfrak{L}_m^{(k)}(\vartheta)\dfrac{1}{\sin\vartheta}d\vartheta,\\ \tilde{c}_{ksr}=\dfrac{1}{R^2}\delta_{ks}^{(1)}\delta_{kr}^{(1)}c_k.\end{cases}$$

通过(18)式可消去方程組(14),(15)中的 ψ_0'.

由方程組(14),(15)解得 a_{kl}' 和 b_{kl}' 后,用时間外推公式

$$\begin{cases}a_{kl}^{(t+\delta t)}=a_{kl}^{(t)}+a_{kl}'^{(t)}\cdot\delta t,\\ b_{kl}^{(t+\delta t)}=b_{kl}^{(t)}+b_{kl}'^{(t)}\cdot\delta t,\end{cases} \tag{19}$$

求出下一时刻的 a_{kl} 和 b_{kl}, 如是重复地解方程組(14),(15), 至預报时刻,而流場可通过方程組(11)倒算出来.

三

平衡方程是联系着流場和高度場的关系式[10],是非綫性混合型方程,它的解法已相当多[11],但据我們所知都是写在平面坐标系內用差分法求解的,混合微商在各种差分格式中都不能得到滿意的精确度[12], E. H. Блинова 和朱永禔虽在球坐标中引入了流函数，但实际計算时是代用高度場的,沒有提出平衡方程[13,14].

对大范围天气預报說来,当然以用球面坐标最为恰当,这时平衡方程可写作：

$$\frac{1}{R^2\sin\vartheta}\Big\{2\Big(\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\frac{\partial v}{\partial\lambda}-\frac{\partial u}{\partial\lambda}\frac{\partial v}{\partial\vartheta}\Big)-\frac{\partial}{\partial\vartheta}[(u^2+v^2)\cos\vartheta]\Big\}+$$
$$+\Delta\Phi-f\Delta\psi-\nabla f\cdot\nabla\psi=0. \tag{20}$$

其中 Φ 为位势高度場，$u = \frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}$, $v = -\frac{1}{R\sin\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}$.

初始时刻 Φ 由观测得到是已知的，而 ψ 視为未知函数根据 Φ 由方程(20)解出，值得注意，在整个球面上解时，方程(20)的解不是唯一确定的，不难看出有无穷多个解，彼此相差一个常数，这是理所当然的，因为在物理上看，这里只能决定速度場，所以流函数不能唯一确定，可以相差一个任意常数；不过，实际上，这无穷多个解中的任何一个对我們都是一样的。为了方便起見，我們解满足下面条件的函数 ψ

$$\psi|_{\vartheta=0} = 0. \tag{21}$$

方程(20)满足条件(21)的解是唯一的，我們就求这个解.

略去二級无穷小項 $\frac{u^2+v^2}{R^2}$ 后，和上面处理方程(9)一样，經过积分关系式的代入，就得到 m 个常微分方程組(现在 $\psi_0 = 0$)，

$$\begin{aligned}\sum_r\sum_s\left(\xi_{krs}\frac{d\psi_r}{d\lambda}\frac{d\psi_s}{d\lambda} - \xi_{krs}\psi_s\frac{d^2\psi_r}{d\lambda^2} - \eta_{krs}\psi_r\psi_s\right) - \\ - \sum_s \rho_{ks}\psi_s - R^2\omega\cos\vartheta_k\sin^2\vartheta_k\frac{d^2\psi_k}{d\lambda^2} = \\ = -\sum_s \tau_{ks}(\Phi_s - \Phi_0) - \frac{R^2}{2}\sin^2\vartheta_k\frac{d^2\Phi_k}{d\lambda^2},\end{aligned} \tag{22}$$

$$k = 1, 2, \cdots m.$$

其中
$$\begin{cases}\xi_{krs} = \sin^2\vartheta_k\delta_{kr}^{(1)}\delta_{ks}^{(1)} + \cos^2\vartheta_k\delta_{kr}\delta_{ks} - \sin 2\vartheta_k\delta_{kr}\delta_{ks}^{(1)}, \\ \zeta_{krs} = \sin^2\vartheta_k\delta_{kr}\delta_{ks}^{(2)}, \\ \eta_{krs} = \sin^3\vartheta_k\cos\vartheta_k\delta_{kr}^{(1)}\delta_{ks}^{(2)}, \\ \rho_{ks} = R^2\omega[\sin^3\vartheta_k\cos 2\vartheta_k\delta_{ks}^{(1)} + \sin^4\vartheta_k\cos\vartheta_k\delta_{ks}^{(2)}], \\ \tau_{ks} = \frac{R^2}{2}[\sin^4\vartheta_k\delta_{ks}^{(2)} + \cos\vartheta_k\sin^3\vartheta_k\delta_{ks}^{(1)}].\end{cases}$$

将每个緯圈上的高度場 $\Phi_k - \Phi_0$ 亦展成

$$\Phi_k - \Phi_0 = \frac{1}{2}a_{k0}^* + \sum_{i=1}^{n}(a_{ki}^*\cos i\lambda + b_{ki}^*\sin i\lambda). \tag{23}$$

和上面处理方程組(10)一样，用 Б. Г. Галеркин 方法可将(22)式化成代数方程組：

$$\begin{cases}\sum_r\sum_s\sum_i\sum_j(A_{krs}^{lij}a_{ri}a_{sj} + \tilde{A}_{krs}^{lij}b_{ri}b_{sj}) + \sum_r C_{kr}^l a_{rl} = \sum_r D_{kr}^l a_{rl}^*, & (24) \\ \sum_r\sum_s\sum_i\sum_j(B_{krs}^{lij}b_{ri}a_{sj} + \tilde{B}_{krs}^{lij}a_{ri}b_{sj}) + \sum_r C_{kr}^l b_{rl} = \sum_r D_{kr}^l b_{rl}^*, & (25)\end{cases}$$

$$k = 1, 2, \cdots m;\quad l = 0, 1, 2, \cdots n.$$

其中
$$\begin{cases}A_{krs}^{lij} = ijF_{lij}\xi_{krs} + i^2E_{lij}\zeta_{krs} - E_{lij}\eta_{krs}, \\ \tilde{A}_{krs}^{lij} = ijE_{lij}\xi_{krs} + i^2F_{lij}\zeta_{krs} - F_{lij}\eta_{krs}, \\ B_{krs}^{lij} = -ijH_{lij}\xi_{krs} + i^2G_{lij}\zeta_{krs} - G_{lij}\eta_{krs}, \\ \tilde{B}_{krs}^{lij} = -ijG_{lij}\xi_{krs} + i^2H_{lij}\zeta_{krs} - H_{lij}\eta_{krs}, \\ C_{kr}^l = 2\delta_{kr}l^2R^2\omega\cos\vartheta_k\sin^2\vartheta_k - 2\rho_{kr}, \\ D_{kr}^l = \delta_{kr}l^2R^2\sin^2\vartheta_k - 2\tau_{kr}.\end{cases}$$

方程組(24),(25)未知数的个数与方程的个数是一样多的．通过解代数方程組(24),(25),就可以由初始时刻的高度場算出流場．

至于由預报时刻的流場倒算高度場时,也是解方程(24),(25),所不同的是此时 a_{si}, b_{si} 不再是未知的,而是已知的了,而 a^*_{si}, b^*_{si} 反而是未知数,需由方程(24),(25)解出,这是关于 a^*_{si}, b^*_{si} 的綫性代数方程．方程的个数与未知数的个数是一样多的．解得 a^*_{si}, b^*_{si} 后,由(23)式可算出 $\Phi_k-\Phi_0$ 来,为了确定 Φ,需要确定出 Φ_0,这就要求引入新的物理条件,可以这样考虑,整个地球上的大气質量是守恆的,非常期內也就是本文討論的时間內,对流层下半部的热力状況平均說来可看成不变的．于是可認定 500 毫巴等压面的高度对全球的平均不随时間改变,

即

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Phi(\vartheta,\lambda,t)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\lambda=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Phi(\vartheta,\lambda,t)\big|_{t=0}\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\lambda=\text{const},\tag{26}$$

通过条件(26)式可确定 Φ_0.

四

对于大尺度的中期預报,采用下面的办法看来是合适的:

首先积分关系法中插值多項式形式的选择是有講究的,我們虽然把問題的定解区域提成全球,实际上不用南半球的气象資料,我們也只打算作北半球的預报,而选择合适的插值多項式,使得所表示的函数,南北半球对称,那么,全球的問題可当成半球的問題来解了．在目前的情况下,作半球預报,引入南北半球对称的假定后作为全球問題来解,显而易見是最合适的．另一方面,我們的函数需要滿足条件 $\left.\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right|_{\vartheta=0}=0$,我們認为可采用以 $\cos^2\vartheta$ 为变元的 Lagrange 插值多項式,而插值点之間的間隔以在 $\cos^2\vartheta$ 坐标內等距为宜,而不是在 ϑ 坐标內等距,詳細的討論不在此进行了,E. H. Блинова 用球函数解半球范围內的綫性化渦度方程时[10],南北方向的作法,相当于我們这里取八个插值点,考虑到积分关系法可以取較粗的网格,我們認为可取下列插值点

$$\begin{array}{ccccccccc}\vartheta= & 0^\circ & 20^\circ39' & 30^\circ & 37^\circ42' & 45^\circ & 52^\circ18' & 60^\circ & 69^\circ21' \\ \cos^2\vartheta= & 1 & \frac{7}{8} & \frac{6}{8} & \frac{5}{8} & \frac{4}{8} & \frac{3}{8} & \frac{2}{8} & \frac{1}{8},\end{array}$$

中緯度較密,高低緯度較稀,这符合气象資料和天气系統分布的特点．这样一来方程(14),(15)是一系列七阶的綫性代数方程組．

天气学中将一个緯圈上的高度場按調和分析展开进行討論的工作已經很多,并且知道了不少的事实,如所知,波数 1—3 的波为超长波,4—7 的波为行星波,以下为气旋波和短波,实际分析表明,对北半球大形势預报,n 取到 10 就够了．就目前观測資料的精确度和我們方程的动力学的特点,取更大波数的波并沒有多大意义了．因此,Б. Г. Галеркин 方法在这里的收斂性和精确度問題,虽然未經数学上的理論討論(这种討論超出了本文的范围),我們根据物理上的气象上的道理是不怀疑的．

于是,現在用 148 个参数表示了北半球的高度場和流場,一个北极的数值和七个緯圈上的 Fourier 系数,每个緯圈上共有 21 个(a_0, a_i, b_i, $i=1,2,\cdots 10$)．当然,原始数值

可以每 5 个經度讀一个,一个緯圈共 72 个,用最小二乘法来求 Fourier 系数,这相当于作个平滑,可減輕观测讀数所产生的偶然誤差,而倒算时可算出足够密的点上的值. 因为实际上任一点的值都可由这 148 个参数計算出来.

五

我們訒为,上面的計算方法和通常采用的差分解法比較起来,有許多优点,例如:

用球面坐标更适合問題的物理特点,不会产生地图投影放大系数和地轉参数的計算誤差,而在平面坐标中这种計算誤差有时是相当严重的[18]. 值得注意,如果球坐标的极点不取在北极,而取在任何別的地方,那么,易見上述推导是无法进行的,这是因为在那样的坐标系內,科氏力不再不依賴于經度. 如所知,在这里科氏力是最重要的动力参数. 由此可見,合适的坐标系統的选择与系統的物理特点不是无关的.

如所知,我国所处的地理緯度是比較偏南的,而差分解法要在边界上引入人为的边界条件,例如边界两圈的数值不变,这在很大程度上,降低了預报質量,縮短了有效預报区域和"可預报时間",使我国大半地区的預报受到很大影响,在夏季特別尖銳. 現在,不用人为边界条件,南面流場也是随时間改变的,这是因为引入了南北半球对称的假定,当然,这是不完全符合实际情況的,由此,必然造成一定的誤差,但是,显而易見,这种誤差比起差分法中人为边界条件所造成的誤差要小得多. 同时,这样一来,也不再会出現等压面普遍升高或降低的現象,实际上,方程(9)和(20)并未包括使等压面平均高度不变的物理条件,这个条件是整个大气質量守恆和对流层下半部热力状况整个来看具有稳定性. 这通过条件(26)引进来了.

将流場,高度場都展成簡諧波,丢掉对大范围天气預报无意义的小波,而对較大的波則完全保留,因之能使得到的解,符合大尺度天气演变的特征. 理論的研究結果表明:大地形对变压的作用在垂直方向是同号的,而小地形則呈正弦曲綫改变[16],利用地形場展成簡諧波的方法可以使我們在已有的工作成果基础上[15],很容易把大地形和小地形的作用分开,只考虑大地形的作用.

实質上,差分解法相当于一致逼近,本文的方法相当于平方逼近. 我們訒为这里平方逼近比一致逼近更适合問題的物理特点. 上面方法用較少的参数表示高度場,流場和地形,这就減少了这些数据所占用的机器內存,从而可避免用鼓,在鼓不够稳的情况下,对順利作出預报有很大的实际意义. 同时,也減少了讀数,打孔的工作量. 在經常作預报时,这种人力的节省是有实际意义的.

参 考 文 献

[1] Дородницын, А. А., Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэрогидродинамики, *Тр. III Всес. матем. съезда* 1956.

[2] Белоцерковский, О. М. Чушкин П. И., Численный метод интегральных соотношений *Журн. вычисл. матем. и мат-физ.* Т. 2, № 5, 1962.

[3] Кибель, И. А., Решение уравнений прогноза погоды методом интегральных соотношений. *Докл. АН СССР.* Т. **143** 1962.

[4] Кадышников, В. М., Метод интегральных соотношений при решении уравнений метеорологии. *Изв. АН СССР Сер. Геофиз.* № **8** 1962.

[5] С. Г. 米赫林,数学物理中的直接方法,1957,高等教育出版社.

[6] 胡祖熾，計算方法，1959，高等教育出版社.
[7] Fawcett, E. B., Six years of operational N. W. P. *J. Applied Met.* **V. 1** No. 3. 1962.
[8] Cressman, G. P., Barotropic divergence and very long waves. *MWR.* **V. 86** No. 8 1958.
[9] 刘瑞芝、赵明哲，正压模式中系統移动速度問題的研究。气象学报 **32**，2 期，1962.
[10] И. А. 基培尔，短期預报流体力学方法引論，1958，科学出版社。
[11] 廖洞賢等，关于平衡方程的差分解法，气象学报，**32**，3 期，1962.
[12] Юдин, М. И., О выборе опорной сети пунктов в целях численного прогноза. *Тр. ГГО* **114** 1960.
[13] Блинова, Е. Н., Белоусов С. Л., Нелинейная нестационарная задача определения полей давления планетарного масштаба. *Докл. АН СССР* **Т 120**, № 2 1958.
[14] 朱永禔，球坐标三层模式的一个非綫性預报，气象学报，**31**，3 期，1961.
[15] 中央气象局数值預报組，用球函数展开北半球地形的計算，气象学报，**30**，4 期，1959.
[16] Мусаелян, Ш. А., Пространственная задача обтекания неровностей Земли. *Докл. АН СССР* **Т. 102**, N 2, 1955.
[17] Юдин, М. И., Прогноз полей H_{600} и H_{850}. *Тр. ЦИП.* **106** 1960.
[18] Белов, П. Н., Способ учета масштаба карты и изменения параметра Кориолиса с широтой. *Тр. ЦИП.* **102** 1962.

ОБ ОДНОЙ БАРОТРОПНОЙ МОДЕЛЕ НОВОГО ТИПА

Чоу Ди-фан, Чжоу Ци-дун, Ду Син-юань

(Научно-исследовательский институт при центральном метеорологическом управлении)

Резюме

С помощью метода интегральных соотношений и метода Галеркина в данной работе предложен новый способ решений баротропного прогностического уравнения и уравнения баланса. Используя симметричность относительно экватора, исключили искусственные граничные условия и тем самым расширили фактические прогностические районы. Указано, что средняя высота изобарической поверхности не может изменяться.

В моделе также учтена разница между направлениями ветров у земли и на 500-мб поверхности.