第32卷 第3期
1962年9月

气 象 学 报
ACTA METEOROLOGICA SINICA

Vol. 32, No. 3
Sept., 1962

关于平衡方程的差分解法*

廖洞賢　周紫东
(中央气象局气象科学研究所)

提　要

用地轉近似来表示风和气压場的关系，在低緯度地区不适用，預报效果不好；如果用平衡方程来代替，則可以克服这个困难。本文簡述了关于这方程現有的差分解法(1955—1958年)，并提出两个新的解法。計算結果可以証明，这两个方法之一可以包括 Bolin 的方法，即后者是前者的一个特例。

一、引　言

近年来通过大量試驗，人們发現，目前在数值天气預报中尚存在着不少問題。Charney[1] 建議，用平衡方程代替地轉近似，作为新的风和气压場的关系。之后，Bolin[2,3] 在工作中发現，用平衡方程作的預报，其效果比用地轉近似作的有显著改进。Masuda[4] 用平衡方程作台风移动預报，也得到过好的結果。看起来，这样作对提高預报准确率有一定的作用。因此，怎样解这方程就成了重要的研究課題。对此，許多人曾提出了各式各样的解法，有些已在实际工作中应用。

为了今后便于改进这些方法，下面我們对其中重要的解法加以論述，并提出两个新的解法，供以后进一步研究这个問題时参考。

二、現有的差分解法

所謂平衡方程，就是对簡化的理想流体运动方程施以散度运算，并略去一些小項，假定水平散度恆等于零而得到的方程，即

$$2J(v,u) - f\zeta + \nabla f\cdot\nabla\psi = -\nabla^2\phi \tag{1}$$

或

$$f\nabla^2\psi + 2(\psi_{xx}\psi_{yy} - \psi_{xy}^2) + f_x\psi_x + f_y\psi_y - \nabla^2\phi = 0, \tag{2}$$

这里所用符号都是气象上慣用的。

方程(2)是以ψ为未知函数的二阶非綫性偏微分方程，是 Monge—Ampère 型微分方程的一个特殊情形。按照偏微分方程理論，当

$$(f + 2\psi_{xx})(f + 2\psi_{yy}) - 4\psi_{xy}^2 > 0 \tag{3}$$

时方程属椭圓型；否則是双曲型或抛物型。現在我們只考虑預报区域內ψ滿足不等式(3)的情形。在这种情形下，Rellich 証明，在一定边界条件下方程有两个，而且仅仅有两个解[5]。

*本文1961年11月3日收到。

从不等式(3)可以看出，乘积 $(f+2\psi_{xx})(f+2\psi_{yy})$ 总大于零，$f+2\psi_{xx}$ 和 $f+2\psi_{yy}$ 必須同时为正或同时为負。这样，对应于这两种情形的解必有

$$\zeta=\nabla^2\psi>-f,$$

或

$$\zeta=\nabla^2\psi<-f,$$

卽絕对渦度大于或小于零。因为在对流层大气中，一般絕对渦度都大于零，我們可以把解限制在

$$f+2\psi_{xx}>0,\ 且\ f+2\psi_{yy}>0 \tag{4}$$

的情形。在以下所述的解法中都有这样的假定。

1955 年 Bolin[2] 首先提出解平衡方程的方法。令

$$\psi_{ij}^{\nu+1}=\psi_{ij}^{\nu}+\delta\psi_{ij}^{\nu}, \tag{5}$$

$$R_{ij}^{\nu}=f\nabla_{ij}^2\psi^{\nu}+2[\psi_{xx}^{\nu}\psi_{yy}^{\nu}-(\psi_{xy}^{\nu})^2]_{ij}-\nabla^2\phi, \tag{6}$$

并略去二級无穷小量，則有1)

$$[(f+2\psi_{yy}^{\nu})\delta\psi_{xx}^{\nu}+(f+2\psi_{xx}^{\nu})\delta\psi_{yy}^{\nu}-4\psi_{xy}^{\nu}\delta\psi_{xy}^{\nu}]_{ij}=\delta R_{ij}^{\nu}. \tag{7}$$

取

$$\delta R_{ij}^{\nu}=-R_{ij}^{\nu}, \tag{8}$$

$$\delta\psi_{xx}^{\nu}=\delta\psi_{i+1,j}^{\nu}+\delta\psi_{i-1,j}^{\nu}-2\delta\psi_{ij}^{\nu}, \tag{9}$$

$$\delta\psi_{yy}^{\nu}=\delta\psi_{i,j+1}^{\nu}+\delta\psi_{i,j-1}^{\nu}-2\delta\psi_{ij}^{\nu}, \tag{10}$$

$$\delta\psi_{xy}^{\nu}=\delta\psi_{i+1,j+1}^{\nu}+\delta\psi_{i-1,j-1}^{\nu}-\delta\psi_{i+1,j-1}^{\nu}-\delta\psi_{i-1,j+1}^{\nu}, \tag{11}$$

則当

$$\delta\psi_{i+1,j+1}^{\nu}=\delta\psi_{i,j+1}^{\nu}=\delta\psi_{i-1,j+1}^{\nu}=\delta\psi_{i+1,j}^{\nu}=0, \tag{12}$$

$$\delta\psi_{i-1,j}^{\nu}=\delta\psi_{i+1,j-1}^{\nu}=\delta\psi_{i,j-1}^{\nu}=\delta\psi_{i-1,j-1}^{\nu}=0, \tag{13}$$

$$\alpha_{ij}^{\nu}=\frac{1}{4(f_{ij}+\nabla_{ij}^2\psi^{\nu})}, \tag{14}$$

$$\delta\psi_{ij}^{\nu}=\alpha_{ij}^{\nu}R_{ij}^{\nu} \tag{15}$$

时，方程(7)可以滿足。这样，用(5)，(14)，(15)三式可以得到 $\psi_{ij}^{\nu+1}$，再重复迭代下去可以得到平衡方程(2)的解答。这里下角 i,j 表示矩形网格中 $x=id$, $y=jd$ 处的物理量；附标 ν 表示第 ν 次近似。

在边界上 Bolin 令

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}=\frac{1}{f}\frac{\partial\phi}{\partial s}-\frac{1}{L}\oint_{\Gamma}\frac{1}{f}\frac{\partial\phi}{\partial s}ds, \tag{16}$$

其中 s 是在网格边界 Γ 上变点对某一定点度量的长度，L 是边界的长。为了使收斂速度加快，ψ 的初値取作方程

$$\nabla^2\psi^{(0)}=\frac{1}{f}\nabla^2\phi-\frac{1}{f^2}\nabla f\cdot\nabla\phi \tag{17}$$

的解。

根据試驗，这个方法的收斂速度很慢，对于范围較大的区域，要迭代 100—150 次才能达到所需要的精度。并且，在絕对渦度接近于零的地方，不便应用。不过，由于計算只牽涉到算术四則，在电子計算机上計算，还是比較方便的。

1956 年，日本都田菊都[6] (Miyakoda) 提出了相似的方法。

1) 这里 Bolin 略去了(1)式中 $\nabla f\cdot\nabla\psi$ 一項。

按照 Petterssen[7] 的作法，令

$$\vec{V} = \frac{1}{f}\vec{K} \times \nabla\Psi, \tag{18}$$

$$A = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{19}$$

$$B = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{20}$$

并略去 f 随緯度的变化，則平衡方程成为

$$\eta = \zeta + f = \sqrt{f^2 + 2\nabla^2\phi + A^2 + B^2}. \tag{21}$$

相应的迭代公式可以写成

$$\zeta^\nu + f = \sqrt{f^2 + 2\nabla^2\phi + (A^\nu)^2 + (B^\nu)^2}, \tag{22}$$

其中

$$\zeta^\nu = \frac{1}{d^2 f}(\Psi_1^{\nu-1} + \Psi_4^{\nu-1} + \Psi_2^\nu + \Psi_3^\nu - 4\Psi_0^\nu); \tag{23}$$

7	2	6
3	0	1
8	4	5

图 1

附标意义如图 1 所示．計算按从左到右，从上向下的顺序进行；

$$B = \frac{1}{d^2 f}(\Psi_1 + \Psi_3 - \Psi_2 - \Psi_4), \tag{24}$$

$$A = \frac{1}{d^2 f}\left(\frac{\Psi_5 + \Psi_7 - \Psi_6 - \Psi_8}{2}\right). \tag{25}$$

因此，只要計算点周围 ψ 的值已知，ψ^ν 可以从 (21) 或 (22) 式得到．

这样作的好处是：由于条件(3)式的限制1)，公式(21)右端的被开方数总大于零，因而，只要修正一次位势場就可以进行計算了．

为了便于計算，都田又把(22)式写成

$$\nabla^2\Psi + \sigma = 0 \tag{26}$$

其中

$$\frac{\sigma}{f} = f - \sqrt{f^2 + 2\nabla^2\phi + A^2 + B^2}. \tag{27}$$

这样，对于一定的 σ，可以解方程(26)而得到 Ψ，代回到公式(27)，又可以得到新的 σ 而求出新的 Ψ．

1958 年 Árnason[5] 試图从理論着手来解平衡方程． 他証明：把平衡方程 (2) 当成 Poisson 方程，即

$$f\nabla^2\psi^{\nu+1} = \nabla^2\phi - 2(\psi^\nu_{xx}\psi^\nu_{yy} - \psi^\nu_{xy}) - \nabla f\cdot\nabla\psi^\nu \tag{28}$$

求解，再循环迭代的作法，是不收斂的．在气旋性涡度大的地方問題更大． 他还証明：在滿足不等式(3)的条件下，如果把方程綫性化，即

$$f\nabla^2\psi^{\nu+1} + \psi^\nu_{yy}\psi^{\nu+1}_{xx} + \psi^\nu_{xx}\psi^{\nu+1}_{yy} - 2\psi^\nu_{xy}\psi^{\nu+1}_{xy} + \nabla f\cdot\nabla\psi^{\nu+1} - g\nabla^2 z = 0, \tag{29}$$

再把 $\psi^{\nu+1}$ 当成未知函数求解，用求得的 $\psi^{\nu+1}$ 代替方程中的 ψ^ν，用 $\psi^{\nu+2}$ 为新的未知函数并

1) 条件(3)式，和略去 f 随緯度变化时 $f^2 + 2\nabla^2\phi > 0$ 的条件，是一样的．这只要把它代入方程 (2) 就可以看得出来．

以之代替方程的 $\psi^{\nu+1}$ 求解，如此繼續，則解是收斂的.

但是，在証明中他假定了 $f, \psi^{\nu}_{xx}, \psi^{\nu}_{yy}, \psi^{\nu}_{xy}$ 在整个求解区域內都是常数. 这和实际情况相差很远. 所以，他的結果只限于在迭代过程中，每次都滿足或近似滿足这些条件，以致因之而引起的誤差很小的情况下，才是正确的.

此外，Bring 和 Charasch[8] 曾提出过和 Bolin 相似的方法. 可是在差分格式中，他把方程中的非綫性項用和原坐标成 45°，格距为 $\sqrt{2}d$ 的格网代替，而其他項仍不变. Bushby, Huckle[9] 和 Shuman[10] 等則曾提出过和都田相似的方法. 对于台风預报，增田[4] 和笠原彰[11]还提出过一些特殊的解法.

总括以上的方法，可以說还存在以下几个問題：

1）差分格式的选取　我們知道，差分格式的好坏不仅在于对某些物理量表示的精度，而更重要的是，对整个方程来說，选取什么样的格式才能使差分方程的解最佳逼近微分方程的解. 象 Bring 和 Carasch 把方程中某些項不区别情况地用一种差分格式表示，而另一些項用另外的表示，并称这样处理后，用 Bolin 方法收斂速度就加快了，这种处理方法是很不严格的.

2）边界条件的选取　平衡方程是一个边値問題. 边界条件如选取不当会直接影响結果，甚至比地轉关系更糟也是可能的. 我們知道，引用平衡方程的目的之一，在于在低緯度代替地轉关系，使分析預报得到改进. 由于一般低緯度地区大多位于預报区域边沿，边界条件取得不好显然是不会收到好的效果的. 另一方面边界条件的选取不应当和問題的提法相矛盾. 不少人（如 Bushby 等）假定边界上流場滿足地轉关系，以致計算区域中有淨的散度，这也是不合理的. 看来今后从方程本身和大气实况着手研究是必要的.

3）求解問題　上面的方法都是用迭代形式求解，但作者們在提出这些方法时很少提出其理論基础，也很少討論其收斂性，在实际工作中到底这些方法，除了經过大量試驗的以外，是否可靠，是値得怀疑的.

总之，解平衡方程目前存在的問題还很多，要想获得可靠而理想的方法还須要我們作艰苦的努力.

下面我們提出两个新的解法.

三、两个新的解法

（1）方法甲

在方程(2)中略去了 $\nabla f \cdot \nabla \psi$ 后，写成差分形式，我們有

$$fd^2\nabla^2\psi + 2(\psi_{XX}\psi_{YY} - \psi^2_{XY}) - d^2\nabla^2\phi = 0, \tag{30}$$

其中

$$\nabla^2\psi = \sum_{i=1}^{4}\psi_i - 4\psi_0; \quad \psi_{XX} = \psi_1 + \psi_3 - 2\psi_0;$$

$$\psi_{YY} = \psi_2 + \psi_4 - 2\psi_0; \quad \psi_{XY} = \frac{1}{4}(\psi_6 + \psi_8 - \psi_5 - \psi_7).$$

令

$$L(\psi^\nu) = fd^2\nabla^2\psi^\nu + 2\{\psi^\nu_{XX}\psi^\nu_{YY} - (\psi^\nu_{XY})^2\} - d^2\nabla^2\phi = R^\nu, \tag{31}$$

$$\psi^{\nu+1} = \psi^\nu + \alpha^\nu R^\nu, \tag{32}$$

$$\varepsilon^{\nu} = \psi^{\nu} - \psi, \tag{33}$$

用 (31) 式减去 (30) 式，則可以得到誤差方程

$$fd^2\nabla^2\varepsilon^{\nu} + 2(\psi^{\nu}_{YY}\varepsilon^{\nu}_{XX} + \psi^{\nu}_{XX}\varepsilon^{\nu}_{YY} - \varepsilon^{\nu}_{XX}\varepsilon^{\nu}_{YY}) - 4\psi^{\nu}_{XY}\varepsilon^{\nu}_{XY} + 2(\varepsilon^{\nu}_{XY})^2 = R^{\nu}, \tag{34}$$

即

$$(fd^2 + 2\psi^{\nu}_{YY} - \varepsilon^{\nu}_{YY})\varepsilon^{\nu}_{XX} + (fd^2 + 2\psi^{\nu}_{XX} - \varepsilon^{\nu}_{XX})\varepsilon^{\nu}_{YY} - 2(2\psi^{\nu}_{XY} - \varepsilon^{\nu}_{XY})\varepsilon^{\nu}_{XY} = R^{\nu}. \tag{35}$$

在实际工作中，我們总可以有

$$|fd^2 + 2\psi^{(0)}_{YY}| \gg |\varepsilon^{(0)}_{YY}|;$$
$$|fd^2 + 2\psi^{(0)}_{XX}| \gg |\varepsilon^{(0)}_{XX}|;$$
$$|2\psi^{(0)}_{XY}| \gg |\varepsilon^{(0)}_{XY}|.$$

譬如，对于零次近似，引用地轉风关系，除了在低緯度地区，一般是可以滿足上述关系的．并且，在某些情况(如梯度风情况) $\varepsilon^{(0)}_{XX}$ 和 $\varepsilon^{(0)}_{YY}$ 往往有相同的符号[1]，非綫性項 $2[\varepsilon^{(0)}_{XX}\varepsilon^{(0)}_{YY} - (\varepsilon^{(0)}_{XY})^2]$ 比 (35) 式左端各項的和通常要小得多．因此，我們可以大胆地把它略去．这样，誤差方程成为

$$(fd^2 + 2\psi^{(0)}_{YY})\,\varepsilon^{(0)}_{XX} + (fd^2 + 2\psi^{(0)}_{XX})\varepsilon^{(0)}_{YY} - 4\psi^{(0)}_{XY}\varepsilon^{(0)}_{XY} = R^{(0)}. \tag{36}$$

在給定的边界条件下，边界上 $\varepsilon^{(\nu)}$ 恆等于零．因此，誤差函数 $\varepsilon^{(\nu)}$ 可以用有限双重傅氏級数

$$\varepsilon^{(0)} = \mathrm{Re}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} A^{(0)}_{m,n}\, e^{-\pi i\left(\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y\right)}, \tag{37}$$

$$\varepsilon^{(1)} = \mathrm{Re}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} A^{(1)}_{m,n}\, e^{-\pi i\left(\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y\right)} \tag{38}$$

相当精确地表示出来，其中 $M = \frac{a}{d}$, $N = \frac{b}{d}$; 2a, 2b 各是計算区域的边长 (設区域为矩形)； $A^{(0)}_{m,n}$, $A^{(1)}_{m,n}$ 是复数．因为

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon^{\nu}_{XX} &= 2\mathrm{Re}\sum_{m,n} A^{\nu}_{m,n}\left(\cos\frac{m\pi d}{a} - 1\right)e^{-\pi i\left(\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y\right)},\\
\varepsilon^{\nu}_{YY} &= 2\mathrm{Re}\sum_{m,n} A^{\nu}_{m,n}\left(\cos\frac{n\pi d}{b} - 1\right)e^{-\pi i\left(\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y\right)},\\
\varepsilon^{\nu}_{XY} &= 2\mathrm{Re}\sum_{m,n} A^{\nu}_{m,n}\left[\cos\pi\left(\frac{m}{a}d + \frac{n}{b}d\right) - \cos\pi d\left(\frac{m}{a} - \frac{n}{b}\right)\right]\cdot\\
&\quad\cdot e^{-\pi i\left(\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y\right)} = -\mathrm{Re}\sum_{m,n} A^{\nu}_{m,n}\left(\sin\frac{m}{a}\pi d\sin\frac{n}{b}\pi d\right)\cdot\\
&\quad\cdot e^{-\pi i\left(\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y\right)},
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

故

1) 如在气旋性环流地区 $\varepsilon^{(0)}_{XX}$, $\varepsilon^{(0)}_{YY} > 0$; 在反气旋环流地区 $\varepsilon^{(0)}_{XX}, \varepsilon^{(0)}_{YY} < 0$.

$$\mathrm{Re}\sum_{m,n} A^{(1)}_{m,n}\, e^{-\pi i\left(\frac{m}{a}x+\frac{n}{b}y\right)} = \mathrm{Re}\sum_{m,n} A^{(0)}_{m,n}\left\{1 + 2\alpha\left[\ (fd^2 + 2\psi^{(0)}_{YY})\left(\cos\frac{m\pi d}{a} - 1\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (fd^2 + 2\psi^{(0)}_{XX})\cdot\left(\cos\frac{n\pi d}{b} - 1\right) - 2\psi^{(0)}_{XY}\sin\frac{m\pi}{a}d\sin\frac{n\pi}{b}d\right]\right\} e^{-\pi i\left(\frac{m}{a}x+\frac{n}{b}y\right)}. \tag{40}$$

如令

$$\kappa_{m,n} = 1 + 2\alpha\left[(fd^2 + 2\psi^{(0)}_{YY})\left(\cos\frac{m\pi d}{a} - 1\right) + (fd^2 + 2\psi^{(0)}_{XX})\left(\cos\frac{n\pi d}{b} - 1\right) - \right.$$

$$\left. - 2\psi^{(0)}_{XY}\cdot\sin\frac{m\pi}{a}d\sin\frac{n\pi}{b}d\right], \tag{41}$$

则对于任一固定的单波(如 $m = m'$, $n = n'$)，只要选取 $\alpha^{(0)}$，使 $\kappa_{m',n'} = 0$，就可以使它彻底消去．这样，

$$\varepsilon^{(1)} = \mathrm{Re}\sum_{\substack{m\neq m'\\ n\neq n'}} A^{(1)}_{m,n} e^{-\pi i\left(\frac{m}{a}x+\frac{n}{b}y\right)}, \tag{42}$$

$$\psi^{(1)} = \psi^{(0)} + \alpha^{(0)}R^{(0)}. \tag{43}$$

把 (42) 和 (43) 式再代入誤差方程 (36)，又可以得到和方程 (40) 相似的方程，但其中附标$^{(0),(1)}$須分別换为$^{(1),(2)}$．这时 $m = m', n = n'$ 的单波不出現．再按前面同样的作法选取 $\alpha^{(1)}$，則可以消去另一单波．如此継續，对于所有的单波，除 $m = n = 0$ 的情形外，都可以消去．这时 $\alpha^{(\nu)}$ 的值可以表示作

$$\alpha^{(\nu)} = \frac{1}{2}\left[\ (fd^2 + 2\psi^{(\nu)}_{YY})\left(1 - \cos\frac{m\pi d}{a}\right) + (fd^2 + 2\psi^{(\nu)}_{XX})\left(1 - \cos\frac{n\pi d}{b}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\psi^{(\nu)}_{XY}\cdot\sin\frac{m\pi}{a}d\sin\frac{n\pi}{b}d\right]^{-1}. \tag{44}$$

从边界条件，在 $x = y = 0$ 处，$\varepsilon^{(\nu)} = 0$，故

$$\sum^{M,N} A^{(\nu)}_{m,n} = 0. \tag{45}$$

因此，只要所有 m, n 不同时为零的波都被消去，$A^{(\nu)}_{0,0}$ 会自动为零．这样，对于誤差方程 (36) 来說，利用三角函数性質，只要作 $(M + 1)(N + 1) - 1$ 次迭代就可以消去誤差而求得解答了．

必須指出，由于方程 (40) 中略去了 ε_{XX}, ε_{YY}, ε_{XY} 的乘积，誤差的消去不是很彻底的．只有当(44)式中 $fd^2 + 2\psi^{(\nu)}_{YY}$, $fd^2 + 2\psi^{(\nu)}_{XX}$, $2\psi^{(\nu)}_{XY}$ 分別用 $fd^2 + 2\psi^{(\nu)}_{YY} - \varepsilon^{(\nu)}_{YY}$, $fd^2 + 2\psi^{(\nu)}_{XX} - \varepsilon^{(\nu)}_{XX}$, $2\psi^{(\nu)}_{XY} - \varepsilon^{(\nu)}_{XY}$ 代替，才可以得到准确的解．可是，$\varepsilon^{(\nu)}$ 是未知量，这样的代替不可能实現．要解决这个困难，可以利用这个事实：当 $|\kappa_{m,n}| < 1$，即

$$0 < 2\alpha\left[(fd^2 + 2\psi^{(\nu)}_{YY} - \varepsilon^{(\nu)}_{YY})\left(1 - \cos\frac{m\pi d}{a}\right) + (fd^2 + 2\psi^{(\nu)}_{XX} - \varepsilon^{(\nu)}_{XX})\left(1 - \cos\frac{n\pi d}{b}\right) + \right.$$

$$\left. + (2\psi^{(\nu)}_{XY} - \varepsilon^{(\nu)}_{XY})\sin\frac{m\pi}{a}d\sin\frac{n\pi}{b}d\right] < 2 \tag{46}$$

时，$A^{(\nu)}_{m,n}$ 是减小的．因为，在迭代过程中 $fd^2 + 2\psi^{(\nu)}_{YY} - \varepsilon^{(\nu)}_{YY}$, $fd^2 + 2\psi^{(\nu)}_{XX} - \varepsilon^{(\nu)}_{XX}$ 总近似保持大于零[1)]，如上式方括号中最后一項的絕对值比其他两項为小时，以小波为对象选取

---

1) 对零次迭代可滿足不等式 (4)．如迭代收斂，則对任意次迭代亦可滿足不等式(4)．

$\alpha^{\nu}(\alpha^{\nu}>0)$，对于所有的波都是收斂的．所以，只要重复迭代几次，就可以得到相当精确的解了．至于重复迭代次数，则要看网格点数和具体情况来确定．

当然，这样作的工作量很大．譬如，对于网格点数为 11×11 的范围来說($M=N=6$)，須要作 35 次迭代；对于更大的范围，工作量更大．不过，在实际工作中，精确度的要求都有一定限制，对上述方法，作更进一步簡化，是完全可能的．举一个例来說，在 ψ_{xy} 比其他項普遍小得多（即气流的散开和汇合很小）时，我們可以取

$$\alpha^{(\nu)}=\frac{1}{2}\left[(fd^2+2\psi_{YY}^{(\nu)})\left(1-\cos\frac{m\pi d}{a}\right)+(fd^2+2\psi_{XX}^{(\nu)})\left(1-\cos\frac{n\pi d}{b}\right)\right]^{-1}. \tag{47}$$

从(46)式不难看出，如取

$$\alpha^{(\nu)}=\frac{1}{4(fd^2+\nabla^2\psi^{(\nu)})}, \tag{48}$$

则迭代总是收斂的．这証明了 Bolin 法在这种情况下是正确的．但收斂速度并不很快．

（2）方法乙

如果我們想法解誤差方程(36)，求出 ε 的分布，同样也可以得到平衡方程的解．令

$$\psi=\psi^{(0)}-\varepsilon^{(0)}, \tag{49}$$

設

$$\varepsilon_6^{(0)}=\varepsilon_7^{(0)}=\varepsilon_8^{(0)}=\varepsilon_5^{(0)}=0,$$

则誤差方程成为

$$a\varepsilon_1^{(0)}+b\varepsilon_2^{(0)}+a\varepsilon_3^{(0)}+b\varepsilon_4^{(0)}-p\varepsilon_0^{(0)}=R^{(0)}. \tag{50}$$

其中

$$a=fd^2+2\psi_{YY}^{(0)};\quad b=fd^2+2\psi_{XX}^{(0)};$$
$$p=4(fd^2+\nabla^2\psi^{(0)}).$$

現在，如我們解上述方程求出 $\varepsilon^{(0)}$，则 ψ 也就得到了．为了方便起見，下面我們省去附标$^{(0)}$．这样，在边界上总有

$$\varepsilon\equiv 0.$$

因为在計算区域內任一点上总有

$$2a+2b=p. \tag{51}$$

因此，我們可以用 Булеев 差分追赶法[12]求解．

奇次追赶用公式

$$\left\{\begin{aligned}
&\gamma=\frac{1}{p-\rho a(a_3+\kappa b_3)\gamma_3-\lambda b(\kappa a_4+b_4)\gamma_4}, &(52)\\
&Z^{\nu}=\gamma[\rho a(Z_3^{\nu}+b_3\gamma_3\delta)+\lambda b(Z_4^{\nu}+a_4\gamma_4\mu)-R], &(53)\\
&\varepsilon^{\nu}=\gamma(\alpha a\varepsilon_1^{\nu}+\beta b\varepsilon_2^{\nu})+Z^{\nu}, &(54)\\
&\delta=\varepsilon_7^{\nu-1}-\kappa\varepsilon^{\nu-1}, &(55)\\
&\mu=\varepsilon_5^{\nu-1}-\kappa\varepsilon^{\nu-1}; &(56)
\end{aligned}\right.$$

偶次追赶用公式

$$\gamma'=\frac{1}{[p-\rho a(a_3+\kappa b_3)\gamma_3'-\beta b(\kappa a_4+b_4)\gamma_4']},$$

$$Z^{\nu\prime} = \gamma'[\rho a(Z_3^{\nu\prime} + b_3\gamma'\delta') + \beta b(Z_4^{\nu\prime} + a_4\gamma_4'\mu') - R], \tag{57}$$

$$\varepsilon^{\nu} = \gamma'[\alpha a\varepsilon_1^{\nu} + \lambda b\varepsilon_4^{\nu}] + Z^{\nu\prime}, \tag{58}$$

$$\delta' = \varepsilon_8^{\nu-1} - \kappa\varepsilon^{\nu-1}, \tag{59}$$

$$\mu' = \varepsilon_6^{\nu-1} - \kappa\varepsilon^{\nu-1}. \tag{60}$$

其中 ν 是迭代次数；$\alpha, \beta, \rho, \lambda$ 是四个参数，在边界上 $\alpha = \beta = \rho = \lambda = 0$，在其他点上 $\alpha = \beta = \rho = \lambda = 1$；$\kappa$ 也是一个参数，可取作 $0 \leqslant \kappa \leqslant 1$.

参 考 文 献

[1] Charney, J., The use of the primitive equations of motion in numerical prediction. *Tellus*, **7** (1955), 22—26.

[2] Bolin, B., Numerical forecasting with the barotropic model. *Tellus*, **7** (1955), 27—49.

[3] Bolin, B., An improved barotropic model and some aspects of using the balance equation for three-dimensional flow. *Tellus*, **8** (1956) 61—75.

[4] Masuda, Y., On a method for solving the balance equation in typhoon region. *Papers in Met. & Geoph.*, Vol. **8** (1957), 55—63.

[5] Árnason, G., A convergent method for solving the balance equation. *J. Meteor.*, **15** (1958), 220—225.

[6] Miyakoda, K., On a method of solving the balance equation. *J. Meteor. Soc. Japan*, **34** (1956), 364—367.

[7] Petterssen, S., On the relation between vorticity deformation and divergence and the configuration of the pressure field. *Tellus*, **5** (1953), 231—238.

[8] Bring, A. and Charasch, E., An experiment in numerical prediction with two nongeostrophic barotropic models. *Tellus*, vol. **10** (1958), 88—94.

[9] Bushby, F. H. & Huckle, V. M., The use of a stream function in a two parameter model of the atmosphere. *Q. J. R. M. S.*, **82** (1956), 409—418.

[10] Shuman, F. G., Numerical methods in weather prediction I. The balance equation. *Monthly weather review*, vol. **85** (1957), No. 10, 329—332.

[11] Kasahara, A., A method for solving the balance equation with the relative vorticity as a carrying parameter. Technical report No. 3, 1957. to the U. S. Weather Bureau (Contract Cwb 9016), Department of Meteo., Univ. of Chicago, 1957.

[12] 馬尔丘克，Г. И. 核反应堆的数値計算法，科学出版社.

ON THE METHOD FOR SOLVING THE BALANCE EQUATION IN FINITE DIFFERENCE FORM

LIAO TUNG-HSIEN, CHOW TSE-TUNG

(Institute of Meteorological Science Research, Central Weather Bureau)

ABSTRACT

It is well-known that the balance equation, in a sense, is a generalization of the geostrophic relationship and may be used in low latitudes where the latter is inapplicable. For this reason, in this paper, a brief report concerning several methods for solving the balance equation is presented and their advantages and shortcomings are discussed. Finally, two new methods are proposed. It can be shown that in some cases the two methods are both convergent and Bolin's method may be regarded as a special case of one of those methods.