第 32 卷 第 1 期　　气 象 学 报　　Vol. 32, No. 1
1962 年 3 月　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　Mar., 1962

凝結反饋对雲层垂直发展影响的一个綫性理論*

顧震潮　胡广兴
（中国科学院地球物理研究所）

提　要

根据小尺度垂直运动的綫性分析，作者証明凝結反饋对云层的垂直发展有着很强的制約作用．这种制約作用在溫度和湿度較大的情况下更为明显．作者引出了在凝結反饋作用下非定常运动中的頻率公式和定常运动下的波速公式．这样，南方雨季中每次雨停时常常見到的云层迅速分层的現象得到了可能的理論解释．

一、問題的題出

在南方山区里，每当雨停或快要停的时候，往往不是云块一齐都消散，而仍然云量很多，大片存在．不同的只是在这时候云开始明显地分层，且往往山腰有层云、层积云，山頂以上有高积云或复高积云，而在高积云上空甚至还有一层高积云，至少是卷云．在山頂的云雾宏观观测，还可以看到远处上下两层中，云云层相連的个别地方，它也是継續下雨的地方，雨旛一直掛到下面的层积云里．值得注意的是，同一季节中这些現象在北方并不是常見的．

在过去，对云层分层的現象也有人加以注意[1,2]，但是，他們只注意到它的热力学，并沒有注意到它的动力学．

这現象显然是大气垂直运动在垂直方向上节点的突然增加，或者說，垂直方向上波长的突然減小．因而不能不是一个动力学問題．

应該注意，云的开始分层是在降雨的充分发展之后，因此，进一步的考虑不难了解它与凝結反饋会有一定关系．事实上，根据大尺度运动的降水数值預报的例子[3]，証明凝結反饋对垂直运动有着很大的反饋作用．对于小尺度运动来說，这种作用显然只有更大．

为了探索凝結反饋在这方面的作用，确定进一步工作的可能和必要，我們在这里先对它作一个綫性分析．

二、非定常問題

用带有“ — ”号的符号来表示未扰动的平均量，用带有“ ′ ”号的符号来表示扰动量，假定未扰动的风速、气压、气溫不随坐标 x 而变，x 是平均风的方向．平均风与 z 无关，并且也不随时間改变，那末我們得到两維問題的方程式組

$$\frac{\partial u'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x}=-\bar{\rho}^{-1}\frac{\partial p'}{\partial x}, \tag{1}$$

* 本文 1961 年 10 月 20 日收到．

$$\frac{\partial w'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial w'}{\partial x}=-\bar{\rho}^{-1}\frac{\partial p'}{\partial z}-\rho'\bar{\rho}^{-1}g, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0, \tag{3}$$

$$p'=\rho' R\bar{T}+\bar{\rho}RT'. \tag{4}$$

由(1)，(3)式消去含 u' 的項再对 z 微分，并把(2)式对 x 微分两次相加得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2 w'=-\bar{\rho}^{-2}\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}-\bar{\rho}^{-1}g\frac{\partial^2\rho^1}{\partial x^2}. \tag{5}$$

引入位温，在 p 变化很小时，由定义得

$$\bar{\theta}\delta\rho'+\bar{\rho}\delta\theta'=0. \tag{6}$$

取 $\bar{\theta}^{-1}\dfrac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}\equiv s$. 并由(1)与(5)式消去含 p' 的項，再用(3)式消去含 u' 的項，則得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2 w'-s\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial w'}{\partial z}=\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial^2\theta'}{\partial x^2}. \tag{7}$$

由于凝結反饋，位温变化是

$$\frac{1}{\bar{\theta}}\frac{d\theta'}{dt}=-\delta\frac{\tilde{\gamma}}{\bar{\theta}}g\bar{\rho}w' \qquad \delta=\begin{cases}0, & \text{不飽和;}\\ 1, & \text{飽和;}\end{cases} \tag{8}$$

其中 $\tilde{\gamma}\equiv(d\theta/dp)_{\text{湿绝热}}$，由此得

$$\frac{1}{\bar{\theta}}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\theta'+w'\left(s+\delta\frac{\tilde{\gamma}}{\bar{\theta}}g\bar{\rho}\right)=0. \tag{9}$$

略去 s 及 $\bar{\rho}$ 的水平变化和局地变化，由(7)式消去 θ' 項，則得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\bar{u}\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x}+\bar{u}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\nabla^2 w'-s\frac{\partial w'}{\partial z}\right)+g\left(s+\delta\frac{\tilde{\gamma}}{\bar{\theta}}g\bar{\rho}\right)\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}=0. \tag{10}$$

这是凝結反饋下小尺度非定常垂直运动的基本方程.

取波动解 $w'\sim e^{i(k_x x+k_z z-\nu t)}$. 代入(10)式，且取波速 $c\equiv\nu/k_x$，則得

$$(\bar{u}-c)^2[isk_z-(k_x^2+k_z^2)]=g\left(s+\delta\frac{\tilde{\gamma}}{\bar{\theta}}g\bar{\rho}\right)k_x^2, \tag{11}$$

或

$$c=\bar{u}\pm\sqrt{\frac{g\left(s+\delta\dfrac{\tilde{\gamma}}{\bar{\theta}}g\bar{\rho}\right)}{(k_x^2+k_z^2)^2+s^2k_z^2}}\,(A+iB), \tag{12}$$

其中

$$A=\sqrt{\frac{k_x^2+k_z^2+\sqrt{(k_x^2+k_z^2)^2+s^2k_z^2}}{2}}, \tag{13}$$

$$B=\frac{sk_z}{\sqrt{2}\sqrt{(k_x^2+k_z^2)+\sqrt{(k_x^2+k_z^2)^2+s^2k_z^2}}}. \tag{14}$$

注意 A, B 都是实数，因而(13)与(14)式中根号里的根号之前应取正号.

不难看出：由于凝結項 $\tilde{\gamma}g\bar{\rho}/\bar{\theta}$ 总是与 s 一起出現，因此，比較这两項的大小就可以估計出凝結反饋所起作用的大小. 在一般情形下对流层平均說来 $s\sim10^{-7}$，最小到 10^{-8}，$g\sim10^3$，$\bar{\rho}\sim10^{-3}$，$\bar{\theta}\sim3\times10^2$，$\tilde{\gamma}$ 的值随温度、压力而不同（見表 1），一般說来

$\tilde{\gamma} \sim 1$—10℃/100 毫巴.

表 1 $\tilde{\gamma}$ 值(℃/100 毫巴)

(对实际上在我国不易出现的气温气压情况不列出 $\tilde{\gamma}$ 值)

气压(毫巴) \ 温度(℃)	−50°	−40	−30	−20	−10	0	10	20	30°
1000	—	—	—	−1	−2	−3	−4	−5	−5.5
700	—	—	—	−1.5	−3	−5	−6.5	−7	—
400	0	−0.5	−2	−4	−7	−10.5	—	—	—

我們可取 $\tilde{\gamma} \sim -6 \times (100\ 毫巴)^{-1}$, 因此 $\tilde{\gamma} g\bar{\rho}/\bar{\theta} \sim -2 \times 10^{-7}$. 所以一般情况下$|\tilde{\gamma} g\bar{\rho}/\bar{\theta}| \sim |s|$ 甚至 $|\tilde{\gamma} g\bar{\rho}/\bar{\theta}| > |s|$. 也不难看到$\tilde{\gamma}$的作用在热带、副热带夏半年,温度高、湿度也高的情况下起的作用更大,而在北方冬季里不会有多大作用(特别是在对流层下部).

現在我們由(12)式来看凝結反饋的作用. 在下雨継續时, $\delta = 1$. 显然凝結反饋的結果造成了不稳定性,因此波速 $c = c_r + ic_i$ 的虚部 $c_i > 0$. 即(12)式中的根号前应取正号. 由此可知,在凝結反饋下, $c_r > \bar{u}$,即传播速度減小.

注意在 $k_z = 0$, $\delta = 0$ 时

$$c_0 = \bar{u} \pm \sqrt{\frac{gs}{k_x^2}}. \tag{15}$$

这是一般的重力波. 因为 $k_z \gg k_x$, $k_z \gg s$,由此得 $A \sim k_z$,而

$$(c - \bar{u})_{实}/(c_0 - \bar{u}) = \frac{k_x}{k_z}\sqrt{1 + \delta \frac{\tilde{\gamma}}{s\bar{\theta}} g\bar{\rho}}, \tag{16}$$

$$(c - \bar{u})_{虚} = c_i = \frac{s}{2k_z^2}\sqrt{g\left(s + \delta \frac{\tilde{\gamma}}{\bar{\theta}} g\bar{\rho}\right)}. \tag{17}$$

当 $\left|\frac{\tilde{\gamma}}{\bar{\theta}} g\bar{\rho}\right| > |s|$ 时,

$$(c - \bar{u})_{实}/(c_0 - \bar{u}) = -\frac{s}{2}\frac{k_x}{k_z^2}\sqrt{-\left(1 + \delta \frac{\tilde{\gamma}}{s\bar{\theta}} g\bar{\rho}\right)}, \tag{18}$$

$$(c - \bar{u})_{虚} = c_i = \frac{1}{k_z}\sqrt{-g\left(s + \delta \frac{\tilde{\gamma}}{\bar{\theta}} g\bar{\rho}\right)}. \tag{19}$$

取 $g \sim 10^3$, $\bar{\rho} \sim 10^{-3}$, $\bar{u} \sim 10^3$, $s \sim 10^{-7}$, $k_z = 10^{-5}$, $k_x \sim 10^{-6}$. 这样,在 $|s| > > \left|\frac{\tilde{\gamma}}{\bar{\theta}} g\bar{\rho}\right|$时,

$$(c - \bar{u})_{实}/(c_0 - \bar{u}) = 10^{-1}\ 到\ 0,$$
$$(c - \bar{u})_{虚} = c_i = 5 \times 10^{0}\ 到\ 0.$$

而在热带中 $\tilde{\gamma} = -7°/100$ 毫巴,这时 $\left|\frac{\tilde{\gamma}}{\bar{\theta}} g\bar{\rho}\right| > |s|$

$$(c - \bar{u})_{实}/(c_0 - \bar{u}) = -5 \times 10^{-4},$$
$$(c - \bar{u})_{虚} = c_i = 10^3.$$

由此可見凝結反饋对波的移动影响不大，有无凝結只对 $(c-\bar{u})_{实}$ 大致造成变慢 0.5 米/秒的差别．但对波的生长卻影响很大，它的发展速率

$$e^{\nu_i t}\approx e^{-10^{-3}t}.$$

卽每小时波幅加大 $e^{3.6}$ 或 37 倍，而在沒有凝結反饋时，

$$e^{\nu_i t}\approx e^{5\times10^{-6}t}.$$

卽每小时波幅加大还不到 2%．这說明雨停凝結終止或減弱后，云层发展也要大大減弱，或趋向消散．

由此看来，凝結反饋对云层发展是很重要的．

三、定常問題

为了了解云层分层的发展，我們現在来考虑定常問題．

对定常情况，可在 (12) 式中取 $c=0$．如果我們不再討論 $\partial w'/\partial z$ 項，那末略去这一項，得到垂直方向上的定常波数

$$k_z=\sqrt{\frac{gs}{\bar{u}^2}+\delta\frac{\tilde{\gamma}g^2\bar{\rho}}{\bar{\theta}\bar{u}^2}-k_x^2}. \tag{20}$$

显然，当

$$\frac{gs}{\bar{u}^2}+\delta\frac{\tilde{\gamma}g^2\rho}{\bar{\theta}\bar{u}^2}<k_x^2 \tag{21}$$

时，波解不存在，但一般 $L_x>3$ 公里左右时，都可保証有波解存在． 在有凝結反饋时 $\delta=1$，(20)式右边減小，因此波数較少甚至沒有波解，而在凝結停止时，$\delta=0$，(20)式右边加大，在同样的 k_x 下，垂直方向的垂直运动的节点增加，而云层就出現分层或夹层現象．

仍取第二节例子中的数值，$g/\bar{u}^2\approx10^{-3}$，可見 $\delta=1$ 时，$k_z^2<0$ 沒有波解，但 $\delta=0$ 时，$k_z=8\times10^{-6}$，或 $L_z=7.5$ 公里． 如果 $\delta\doteq1$ 时，垂直气流在对流层中部最大，$k_z=2\times10^{-6}$，那么 $s\sim2.4\times10^{-7}$，而在 $\delta=0$ 时，$k_z=1.4\times10^{-5}$，卽 $L_z=4$ 公里．如果在 0.5 公里有一层云的話，在 4.5, 8.5 和 12.5 公里各将有一层云． 而在它們中間将有明显的“夹层”．

由此可見，在雨停后，由于凝結反饋的終止，云层可能出現分层的現象，而在雨开始时，会有云层迅速合并的現象．应該注意的是，由于这种过程是垂直运动在垂直方向上节点数的突然改变，分成几层的云层就是由原来的厚层云层从中迅速断裂而形成的，而不是从别的地方另外移来或者由什么別的作用另外逐漸形成的． 因此雨停之后，多层云层的出現是可以十分迅速的． 它是在原地原有云层上垂直运动的动力学状态突然改变的結果．

但应該指出，风速垂直切变对云层分层有不利的作用，这是不难看出的．利用对流近似，我們得到下列扰动方程組

$$\bar{u}(z)\frac{\partial u'}{\partial x}+w'\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial x}, \tag{22}$$

$$\bar{u}(z)\frac{\partial w'}{\partial x}=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial z}-\lambda\vartheta', \tag{23}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial w'}{\partial z}+\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}w'=0, \tag{24}$$

$$\frac{\bar{u}(z)}{\bar{\theta}}\frac{\partial \vartheta'}{\partial x}+w'\left(s+\delta(x,z)\frac{\tilde{\gamma}}{\bar{\theta}}g\bar{\rho}\right)=0, \tag{25}$$

(22)—(25)式为 u', w', p', ϑ' 的閉合方程組.

引进下列关系式

$$u'=\bar{u}(z)\frac{\partial \xi'}{\partial x},\qquad w'=\bar{u}(z)\frac{\partial \zeta_1'}{\partial x}, \tag{26}$$

ξ', ζ' 为相对于坐标軸 x 的位移函数.

作下列变换

$$\xi=\xi'\sqrt{\bar{\rho}},\quad \zeta_1=\zeta_1'\sqrt{\bar{\rho}},\quad \vartheta=\vartheta'\sqrt{\bar{\rho}},\quad P=\frac{p'}{\sqrt{\bar{\rho}}\,\bar{u}^2(z)}, \tag{27}$$

以(27)式代入(22)—(25)式后，消去 ϑ_1 并注意在 $x=-\infty$ 处 ζ', ξ' 等量等于零. 則得到下列方程組

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}+t\zeta_1+P=0, \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial}{\partial z}+2t-s_1\right)P+\alpha(z)\zeta_1=0, \tag{29}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \zeta_1}{\partial z}+(t-s_1)\zeta_1+\frac{g}{c^2}\zeta_1=0. \tag{30}$$

由(28)—(30)式消去 ξ, P，得到垂直位移 ζ_1 的方程

$$\mathrm{L}\left[\frac{\partial \zeta_1}{\partial z}+(t-s_1)\zeta_1+\frac{g}{c^2}\zeta_1-t\zeta_1\right]+\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial x^2}+\alpha(z)\zeta_1=0, \tag{31}$$

其中算子

$$\mathrm{L}=\frac{\partial}{\partial z}+2t-s_1,$$

$$t=\frac{1}{\bar{u}}\frac{d\bar{u}}{dz},\quad s_1=-\frac{1}{2}\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{d\bar{\rho}}{dz}-\frac{g}{c^2},\quad \alpha(z)=g\frac{\gamma_a-\gamma}{\bar{\theta}\bar{u}^2}+\frac{g}{\bar{\theta}\bar{u}^2}\delta(z)\tilde{\gamma}g\bar{\rho}, \tag{32}$$

$$\frac{\gamma_a-\gamma}{\bar{\theta}}=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{d\bar{\rho}}{dz}-\frac{g}{c^2}=s.$$

在推导中我們假定了 δ 与 x 无关. $\alpha(z)$, s_1, s, t 等以后都看作参量，对整层大气各取它們的平均值.

令

$$\zeta=\zeta_1\exp\left(\frac{4\gamma_a+\gamma}{2\bar{\theta}}+t\right)z, \tag{33}$$

則(31)式变成下列二維定常赫姆霍兹 (Helmholtz) 方程

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}+\left[\alpha-\left(t-\frac{g}{2c^2}\right)^2\right]\zeta=0. \tag{34}$$

取下列形式的波解

$$\zeta\sim\exp i(k_x x+k_z z). \tag{35}$$

我們得到下列关系式

$$k_z = \sqrt{\left[\alpha - \left(t - \frac{g}{c^2}\right)^2\right] - k_x^2}. \tag{36}$$

(34)式在垂直方向有駐波解存在的条件为

$$\alpha - \left(t - \frac{g}{2c^2}\right)^2 > k_x^2,$$

或

$$\frac{gs}{\bar{u}^2} + \delta\frac{g^2\bar{\rho}\tilde{\gamma}}{\bar{\theta}\bar{u}^2} - \left(\frac{1}{\bar{u}}\frac{d\bar{u}}{dz} - \frac{g}{2c^2}\right)^2 > k_x^2. \tag{37}$$

为了便于比較，我們采用了文献[1]中 $g, \bar{\rho}, \bar{u}, s, \tilde{\gamma}$ 的数值

$$\frac{\tilde{\gamma}g\bar{\rho}}{\bar{\theta}} \sim 2 \times 10^{-7}, \quad \text{并取}\quad c \sim 3 \times 10^4, \quad \left|\frac{d\bar{u}}{dz}\right| \sim 5 \times 10^{-3}, \quad \bar{\theta} = 3 \times 10^2.$$

不难求得，只要 $L_x > 3.5$ 公里，(34)式即有波解存在．由(36)式可以看出，凝結反饋与风速垂直切变 $\left(\text{不論}\ \frac{d\bar{u}}{dz} > 0\ \text{或}\ \frac{d\bar{u}}{dz} < 0\right)$ 的存在，都有可能使根号內数值減小，亦即不等式(37)式有可能不成立．换言之，凝結反饋和风速垂直切变減小了出現波解的范围．当 $\delta = 0$，即在凝結停止的条件下，对于同样的 k_x 值，风速垂直切变的負貢献亦是不能忽視的，其大小相当于 $\frac{gs}{\bar{u}^2}$ 項的 25%．由此可見，在有风速垂直切变时，垂直方向波数是減少的．

我們取 $k_x \sim 10^{-6}$，当有凝結反饋时，則 $k_z^2 < 0$，即沒有波解．当 $\delta = 0$ 时，$k_z = 8.9 \times 10^{-6}$ 或 $L_z = 7.1$ 公里，与沒有风切变时的結果比較，显然，风速垂直切变是起着使垂直方向垂直运动节点数減少或波长变长的作用．$\frac{d\bar{u}}{dz} < 0$，这种作用增大，如 $\delta = 0$，$\frac{d\bar{u}}{dz} = -5 \times 10^{-3}$，則 $k_z = 8.3 \times 10^{-6}$，即 $L_z = 7.5$ 公里．如果垂直气流在对流层中部最大，$k_z = 2 \times 10^{-6}$，則当 $\delta = 1$ 时，$s = 1.5 \times 10^{-7}$，而当 $\delta = 0$ 时，則 $k_z = 1.1 \times 10^{-5}$ 即 $L_z = 5.6$ 公里，与沒有风切变的結果比較，风速垂直切变的作用是非常显著的．由此，我們亦可以了解，在雨后凝結停止，只有在风速垂直切变很小的情况下，比較有利于云层的出現．

由此看来，过去单純从热力学的观点，想用多种气团相互重迭以及輻射等原因来解释多层云层的現象，至少对这种雨后云层突然分成多层的現象是不合式的．就是对于对流层上部的多层云层的現象只从气团相迭形成多个界面的想法也是不大現实的．

值得注意的另一个特点是，由于 $\tilde{\gamma}$ 值在温度很低时十分微小，因此在北方冬半年里就不可能出現这种現象．的确，温度很低时即使在大雪后也是很少見到云层突然分层的現象的．在我国最容易出現雨后分层的正是华南的夏半年．

最后，应該指出，虽然上面的討論只限于自由波，但凝結反饋对地形強迫扰动不是沒有影响的．很清楚，在凝結反饋太強时 $\tilde{\gamma}$ 項的作用可以使波解破坏，因而可以使出現波界

的可能性变得更少．事实上由于这时候水平自由振动的波长 $L_s = 2\pi\bar{u}/\sqrt{gs}$ 应由 $L_s = 2\pi\bar{u}\Big/\sqrt{g\left(s + \delta\frac{\tilde{\gamma}}{\theta}g\bar{\rho}_0\right)}$ 代替，可見在有凝結反饋时自由振动的波长加长．按照葛內（Queney）的計算結果[4]，如果山的寬度是 a，那末，

$a \approx L_s$ 时，有背风波，

$a \ll L_s$ 时，山的扰动指数地向上減小，

$a \gg L_s$ 时，垂直方向上有波界

$$\left(\text{扰动} \sim \cos k_z - \frac{x}{a}\sin k_s z\right)$$

$(k_s = 2\pi/L_s)$，因此在凝結反饋下小地形更不易引起背风波和垂直方向上的波解．

从上面的一些結果看来，凝結反饋对云层垂直发展的一些特征有着很重要的影响．在小尺度現象的預报中，这种反饋作用必須加以考慮，不然就难于恰当地預报云层分层的現象．

至于在进一步的工作中，这个問題的非綫性分析是十分需要的，因为凝結反饋本身就是一个非綫性現象[5]，在非綫性运动中它的作用会更充分地表現出来．

参 考 文 献

[1] Peppler, W., Beitr. f. Phy. fr. Atmosp., 8 (1927), 270—277.
[2] Süring, R., Die Wolken, 3te aufl. 1950. 3te Kap. Besondere Wolkform 中 Mehrfaehschilhtung von Wolken 节, 64—67.
[3] Smagorinsky, J., Ber. Deut. Wetterd., Bd. 5., Nr. 38, 82—90, 1957.
[4] Quaney, P., Bull. Amer. Met. Soc., 29 (1948), 16—26.
[5] 顾震潮，大气过程的控制观，动力气象学論文集，1961，科学出版社．

A LINEAR THEORY OF THE INFLUENCE OF CONDENSATION FEEDBACK ON THE DEVELOPMENT OF THE CLOUD

Koo Chen-chao, Hu Kwang-shing
(*Institute of Geophysics and Meteorology, Academia Sinica*)

Abstract

Based on a linear analysis of the small scale vertical motion the authors show that the feedback of condensation gives a strong control on the vertical development of the cloud. The frequency equation for the non-stationary case is given with the feedback of condensation taken into consideretion. A possible explanation of the appearence of multi-layer cloud in he southern countries towards the ending of rain is presented.